UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA, LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

“ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO Y GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE CUENCA, CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA, FRACCIONES ALGEBRAICAS, RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN”

Tesis previa a la Obtención del Título de licenciado en Ciencias de la Educación especialidad Matemática y Física.

A**UTORES:** ESPINOZA CHACHA CARLOS ALFREDO

PAUCAR NARVAEZ EDWIN MARTÍN

DIRECTOR: Mgs. JUAN FERNANDO BARRAZUETA SAMANIEGO.

CUENCA – ECUADOR

2015

RESUMEN

"Elaboración de material didáctico y guía para el laboratorio de matemáticas de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, correspondiente a las unidades: conceptos fundamentales de álgebra, fracciones algebraicas, radicación y potenciación", es un trabajo diseñado para desarrollar actividades didácticas que permiten al estudiante de la carrera de Matemáticas y Física reforzar los temas aprendidos en clases. La siguiente propuesta contribuye a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con metodologías basadas en el uso de material didáctico que el estudiante podrá obtener y también construir.

En el primer capítulo se desarrolla la parte teórica con temas como: la escuela tradicional, escuela nueva, la didáctica, el aprendizaje significativo, materiales didácticos y tecnológicos, con el fin de dar a conocer como la escuela ha mejorado su metodología de enseñanza y aprendizaje desde sus inicios hasta la actualidad y la importancia que ha tenido el incluir la didáctica como método de enseñanza.

El segundo capítulo contiene un análisis estadístico que se realizó mediante encuestas a los estudiantes del segundo ciclo, cuya información demuestra la importancia del material didáctico y sugiere la utilización de estos recursos en la enseñanza del álgebra elemental.

El tercer capítulo contiene la propuesta, misma que está estructurada en tres bloques, cada bloque contiene subtemas divididos en una parte teórica y una guía que el estudiante deberá seguir paso a paso para desarrollarla. Los

materiales que serán utilizados se han elaborado y entregado junto con esta propuesta y otros se encuentran en las guías respectivas.

PALABRAS CLAVES:

- MATERIAL DIDÁCTICO
- MATEMÁTICAS
- ENSEÑANZA – APRENDIZAJE
- ÁLGEBRA ELEMENTAL
- FRACCIONES ALGEBRAICAS.
- POTENCIACIÓN
- RADICACIÓN

ABSTRACT

“Preparation of teaching materials and guides for mathematics laboratory career of Mathematics and Physics at the University of Cuenca, corresponding to units: basic concepts of algebra, algebraic fractions, establishment and empowerment", is a work designed to develop educational activities that allow the student of Mathematics and Physics career reinforce topics learned in class. The following proposal contributes to the teaching and learning process of mathematics with methodology based on the use of didactic material that students can obtain and build.

In the first chapter the theoretical part is developed with topics such as the traditional school, new school, didactics, meaningful learning, teaching materials and technology, in order to raise awareness of how the school has improved its teaching and learning methodology from its beginnings to the present and the importance it has had to include teaching as a teaching method.

The second chapter provides a statistical analysis that was carried out by surveying students in the second cycle, the information shows the importance of teaching materials and suggests the use of these resources in teaching elementary algebra.

The third chapter contains the proposal, which is itself divided into three blocks, each block contains the different topics divided into a theoretical part and a guide that students must follow step by step to develop it. The materials to be

used have been developed and delivered along with this proposal and others are in the corresponding guides.

KEYWORDS:

- TEACHING MATERIAL
- MATHEMATICS
- TEACHING – LEARNING
- ELEMENTARY ALGEBRA
- ALGEBRAIC FRACTIONS
- EMPOWERMENT
- FILING

ÍNDICE

CLÁUSULA DE DERECHOS DE AUTOR

Universidad de Cuenca
Cláusula de derechos de autor

YO, **CARLOS ALFREDO ESPINOZA CHACHA,** autor de la tesis **"ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO Y GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE CUENCA, CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA, FRACCIONES ALGEBRAICAS, RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN"** reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al art. 5 literal c) de su reglamento de propiedad intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de licenciado en Ciencias de la Educación en la especialidad Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna a mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 01 de octubre de 2015

Carlos Alfredo Espinoza Chacha

010517878-4

Universidad de Cuenca
Cláusula de derechos de autor

YO, **EDWIN MARTÍN PAUCAR NARVÁEZ,** autor de la tesis **"ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO Y GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE CUENCA, CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA, FRACCIONES ALGEBRAICAS, RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN"** reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al art. 5 literal c) de su reglamento de propiedad intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de licenciada en Ciencias de la Educación en la especialidad Matemáticas y Física. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna a mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 01 de octubre de 2015

Edwin Martín Paucar Narváez

010577605-8

CLÁUSULA DE PROPIEDAD INTELECTUAL

Universidad de Cuenca
Cláusula de propiedad intelectual

YO, **CARLOS ALFREDO ESPINOZA CHACHA,** autor de la tesis **"ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO Y GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE CUENCA, CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA, FRACCIONES ALGEBRAICAS, RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN"** certifico que todas las ideas opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 01 de octubre de 2015

Carlos Espinoza

Carlos Alfredo Espinoza Chacha

010517878-4

Universidad de Cuenca
Cláusula de propiedad intelectual

YO, **EDWIN MARTIN PAUCAR NARVÁEZ,** autor de la tesis **"ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO Y GUÍA PARA EL LABORATORIO DE MATEMÁTICAS DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA DE LA UNIVERSIDAD DE CUENCA, CORRESPONDIENTE A LAS UNIDADES: CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA, FRACCIONES ALGEBRAICAS, RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN"** certifico que todas las ideas opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 01 de octubre de 2015

Edwin Martín Paucar Narváez

010577605-8

Mg. Juan Fernando Barrazueta Samaniego

CERTIFICA:

Que el presente trabajo de graduación ha sido revisado de manera prolija, por tanto autorizo su presentación; el trabajo responde a los requisitos establecidos en el reglamento de graduación de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación.

Mg. Juan Fernando Barrazueta Samaniego

C.I. 0103582706

Tutor de Trabajo de Graduación

AGRADECIMIENTO

Principalmente a mi madrecita por todo el esfuerzo y el apoyo brindado durante los años que estuve en la universidad, sus palabras de aliento y sus concejos.

A nuestro tutor de tesis por brindarnos su colaboración en el desarrollo de este trabajo

Carlos Espinoza

A Dios por darme la vida, la sabiduría y la oportunidad de cumplir con esta gran meta.

A los docentes que con paciencia transmitieron sus conocimientos de la mejor manera y sobretodo brindarme su amistad.

A mi director de tesis Mgs. Juan Fernando Barrazueta que nos brindó toda su ayuda en la dirección de este proyecto.

Martín Paucar

DEDICATORIA

De manera muy especial a mi madre por ser mi apoyo más valioso en esta etapa de mi vida y a todas las personas que de una manera u otra supieron brindar su apoyo para culminar esta meta propuesta.

Carlos Espinoza

A mi papá Juan y a mi mamá Narcisa por ser los que me educaron y formaron a lo largo de toda mi vida con sus mejores consejos.

A mis hermanos Juan y Clara que fueron un gran apoyo moral en mi caminar.

A mi familia y amigos que estuvieron pendiente de mí.

A todos ellos, son lo mejor que Dios me ha regalado. Dios los bendiga.

Martín Paucar

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia que con el pasar de los años ha estado siempre presente en el campo educativo, convirtiéndose en una asignatura de gran importancia para el desarrollo de la ciencia y tecnología de la sociedad. En la actualidad ésta ciencia está bien estructurada y organizada, de manera que su enseñanza comprende una serie de etapas que los estudiantes van alcanzando de acuerdo a su comprensión mental, empezando de lo simple a lo complejo.

Es importante saber que la transmisión de los contenidos de álgebra que el profesor hace al estudiante, debe ser clara de manera que el estudiante pueda desarrollar su razonamiento al máximo y por ende formar parte de su experiencia, para así, en circunstancias posteriores poder aplicarlo de mejor manera. Por tal motivo el docente debe buscar distintos recursos didácticos para impartir sus clases y que los contenidos trasmitidos queden inmersos en cada estudiante, así se cubrirá exitosamente las expectativas que la educación de hoy en día demanda.

La matemática, como se mencionó anteriormente, es una ciencia de vital importancia para la sociedad, por lo que debemos ser conscientes de la importancia de su aprendizaje. A su vez, los temas que abordamos en esta propuesta vienen a ser los cimientos del álgebra, los cuales debemos interiorizar para así no tener dificultad alguna en los próximos contenidos matemáticos a ser estudiados.

El proceso de enseñanza por parte del docente deber ser implementada con materiales didácticos y recursos tecnológicos que permitan complementar las clases y a su vez que los estudiantes sientan interés en aprender, por tal razón la propuesta está encaminada en aportar estos recursos didácticos que ayudarán a los estudiantes un mejor aprendizaje.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTACIÓN TEORICA

1.1 Escuela tradicional

La escuela tradicional nace en el siglo XVII según la historiadora del campo educativo Margarita Gonzales quien afirma en su ensayo “ESCUELA TRADICIONAL-NUEVA TECNOCRÁTICA Y CRÍTICA”, donde señala que en esta época se destacan personajes como: Comenio, Ratichius e Ignacio de Loyola entre los principales fundadores de la escuela tradicional, éste último fue de la orden de los jesuitas y en base a su orden hizo aportes a la pedagogía basándose en el rango más notable que era la disciplina.

La escuela tradicional surgió para cubrir las necesidades que se presentaron en esa época como por ejemplo, formar a la población con valores personales, morales y socio-culturales, diseñando de manera adecuada todos los modelos educativos que satisfacían lo que la sociedad deseaba. Por ende, las prácticas escolares habituales se fundamentaban en dos pilares que son la autoridad y el orden. El maestro, figura de personalidad, se personifica como dueño del conocimiento y del método. El orden se centra en el método de control que debe llevar este proceso de enseñanza.

La escuela tradicional está designada a garantizar el dominio de todas las situaciones ya que se cuenta con ayuda de muchos modelos intelectuales y morales que están establecidos para este tipo de enseñanza-aprendizaje

Los aspectos que predominan en ésta escuela tradicional son el verbalismo y la pasividad, “La relación alumno profesor está basada en el predominio de la autoridad, mediante una disciplina impuesta, se exige sobre todas las cosas la obediencia” (Pedagogia Tradicional 15). Así mismo, entre esta serie de características señala que el orden y el castigo son esenciales, de igual manera la importancia de la trasmisión de cultura y conocimientos entre otros. Finalmente la escuela tradicional termina por ser un sistema estricto y el maestro se centra como principal protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por lo antes mencionado, se puede decir que el modelo de escuela tradicional respeta un estricto sistema de autoridad donde el maestro tiene la mayor jerarquía y es él quien toma las decisiones que van a ser fundamentales para una buena organización, tanto del trabajo como de la sociedad. La metodología de enseñanza del maestro no permite que el estudiante obtenga ciertos tipos de experiencias, como la observación y la experimentación de diferentes eventos que se presentarán en este proceso de aprendizaje, por lo que terminaría cegando el pensamiento y la interpretación de todo lo el que el estudiante aprende, llegando a formar de esta manera la última pieza del proceso educativo, al carecer de autoridad y de poder.

En la actualidad, “este sistema, con algunas variantes, prevalece, y es el responsable de los grandes vacíos en la formación de los profesores y en la deformación de un proceso educativo, que no responde a las necesidades de aprendizaje básicas” (El Comercio 3) con ello, los contenidos que se desean transmitir están concluidos, es decir, el estudiante está limitado a su deseo de conocer, debido a que el maestro es la autoridad y lo sabe todo, por ende el estudiante debe incorporar dichos conocimientos sin su debido cuestionamiento.

Por ello, esta propuesta planteada permitirá mejorar los métodos de aprendizaje en el campo de la matemática, ya que implementará de clases basadas en la observación y experimentación, que contrasta a la escuela tradicional, lo que ayudará al estudiante a ser el protagonista principal del proceso educativo, incorporando el conocimiento de manera experimental y razonable.

1.2 La escuela nueva

El origen de la escuela nueva data por el siglo XIX y se dio gracias a una serie de principios como: el aprendizaje cooperativo, personalizado, participativo y constructivista que fueron alternativas de la escuela tradicional. Las necesidades de la infancia y la interpretación de ella originaron una nueva metodología de enseñanza para los maestros de esa época. La Escuela Nueva se inclina por un modelo didáctico y educativo completamente diferente al tradicional, se denomina paidocentrismo y consiste en convertir al niño en el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje, mientras que el profesor dejará de ser el punto de referencia fundamental denominado magistrocentrismo para convertirse en un dinamizador de la vida en el aula y a su vez al servicio de los intereses y necesidades de los alumnos.

La función principal de la escuela nueva según Dewey es la actividad de “aprender haciendo” en un ambiente educativo. La ideología de los pedagogos en este nuevo sistema de educación es la denuncia de las características principales de la educación tradicional como pasividad, intelectualismo, magistrocentrismo, superficialidad, enciclopedismo, verbalismo; definiendo un nuevo rol o función a los integrantes del proceso educativo, de esta manera el estudiante pasa a ser el actor central de la educación, lugar que era ocupado por el maestro.

Los educadores que son considerados precursores del movimiento de la Escuela Nueva son: Jean-Jacques Rousseau, Pestalozzi, Froebel y Herbart. Estos pedagogos fueron quienes pusieron las bases teóricas de la educación moderna.

Rousseau cree que el niño “no debe hacer nada por obediencia sino por necesidad; de forma que las voces obedecer y mandar se proscriban de su léxico, y más aún las de obligación y deber” (Rousseau 46). Rousseau se centra en el niño, en entenderlo de manera distinta a la del adulto y sometido a sus propias leyes de evolución. Plantea una nueva metodología sobre la educación basadas en las necesidades e intereses del niño, “Hemos de estudiar con cuidado su lenguaje y sus signos, a fin de que, en una edad en que no saben disimular, distingamos en sus deseos lo que procede directamente de la naturaleza y lo que procede de la opinión.” (Rosseau 87-88)

Pestalozzi afirmaba que la educación no debería darse solamente con la transmisión de conocimientos sino también ejercer y desarrollar la disposición y los talentos de los estudiantes. (Burgos 4), también concibe al niño como “dotado de todas las facultades de la naturaleza humana, pero sin ninguna de ellas desarrolladas: un capullo todavía por abrirse. Cuando el capullo se abre, cada una de las hojas se desdobla, ninguna se queda atrás." (Pestalozzi 4). La educación del pueblo según Pestalozzi viene a ser un medio para transformar las condiciones de vida, así, la educación está al servicio de la transformación de la sociedad y esta educación se centra más en el desarrollo de las capacidades intelectuales y artísticas del estudiante.

Froebel fue el creador del kindergarden y su propuesta estaba enmarcada en los diferentes juegos como un factor fundamental en la enseñanza de los niños, pues mediante la observación se dio cuenta que los niños al jugar socializaban entre ellos, por ello introdujo este nuevo sistema de socialización al diseñar diferentes juegos y canciones que ayudarían al estudiante en el proceso del aprendizaje. Así pues: "El niño, en cualquier lugar que se encuentre, sabe siempre asegurarse un espacio particular para jugar con sus camaradas, y estos juegos en común producen frutos utilísimos a la sociedad misma" (Froebel 37). De esta manera Froebel considera la acción como algo primordial para el desarrollo del niño. Sus ideas renovaron lo que fue la educación tradicionalista que regían en el siglo pasado.

Otro fundador de la escuela nueva es Johann Friedrich Herbat quién aporta una pedagogía científica basándose en la filosofía y la psicología. Apunta a la educación moral y desarrolla teorías de los pasos formales que van a ser cimientos para corrientes educativas más avanzadas. "Considera como fin educativo el desarrollo de la virtud, que consiste en el acuerdo de la voluntad con las ideas éticas, como lo son la libertad íntima, la perfección, la benevolencia, el derecho y la equidad" (Mijangos Pan 2)

La escuela nueva como modelo pedagógico resalta la importancia que tiene el estudiante de hacer un papel activo, ser consciente de lo que desea aprender de acuerdo a sus posibilidades y sus intereses, el profesor tiene que ser partícipe del desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje para que mediante la socialización de ideas posibilite al estudiante alcanzar los objetivos propuestos.

En cuanto a la propuesta planteada en este trabajo de tesis los pilares fundamentales se centran en estos principios de escuela nueva, así pues, se pone al estudiante como centro del proceso educativo, siendo el mentor y creador de su conocimiento basándose en la observación y el razonamiento lógico de toda esta serie de actividades propuestas en este libro "Guía de Laboratorio de Algebra Elemental".

1.3 Didáctica

La palabra didáctica proviene del griego "didasticos" que significa "el que enseña" y se refiere a la educación, otra palabra que tiene similitud es "didasco" que significa "enseño", que se le ha considerado parte principal de la pedagogía que da reglas para la enseñanza, fue por esto que en un principio se interpretó como "el arte o la ciencia de enseñar o instruir".

En el siglo XVI Wolfang Riatke propuso un nuevo sistema educativo en Alemania al que se le dio el nombre de didacticus, sin embargo Comenius con su libro Didáctica Magna hizo de la palabra didáctica un término más conocido. En este libro el autor se refiere al estudiante como el centro del proceso educativo y que entorno al él giren los docentes, los textos, las aulas y los diferentes métodos que serán protagonistas en la enseñanza-aprendizaje.

"Comenio se atrevió a prometer un artificio para enseñar todo a todos. Es una sistematización teórica pionera en torno a la idea de tener un método. Comenio presenta una alternativa metódica todavía basada, como señala Hamilton, en un modelo artesanal." (Feldman 14)

Comenio fue autor de la creación de la escuela popular a la que todos los estudiantes tienen el acceso sin distinción. En esta escuela se llega a establecer el método "aprender haciendo" cuya función es hacer que el estudiante cree su propio conocimiento basándose en la observación y sus experiencias, ya que al estar en contacto con los diferentes elementos manipulables el estudiante tiende a comprender los contenidos que se están transmitiendo de una forma diferente, pues en esta metodología no solo está presente el sentido del oído y de la vista del estudiante, que es lo que se presenta en la mayoría de las aulas de clase, sino también el razonamiento, la lógica y el poder ser participe activo en el desarrollo de las diligencias planteadas por el maestro para la enseñanza.

La didáctica es un pilar fundamental para el proceso educativo, pues es una disciplina pedagógica que se compromete a la "mejora de todos los seres humanos, mediante la comprensión y transformación permanente de los procesos socio-comunicativos, la adaptación y desarrollo apropiado del proceso de enseñanza-aprendizaje" (Antonio Medina 15). De esta manera la didáctica, dentro del campo educativo, conlleva a mejorar la comprensión de los conocimientos transmitidos por parte del maestro. "La Didáctica es algo más que el método de enseñar, ya que implica la intencionalidad educativa, la formación del docente. Por tanto, no sólo se busca la instrucción, sino la formación" (A. Hernandez 10). Se puede decir también que la didáctica es un conjunto de técnicas que se encarga en dirigir la enseñanza mediante una serie de principios y métodos aplicables a muchas disciplinas educativas.

La didáctica se centra no tanto en lo que se va a enseñar sino más bien cómo lo va a enseñar, por eso, el profesor a más de tener pleno conocimiento de su materia debe también tener una conveniente formación didáctica. Es importante que considere al estudiante en su medio físico, afectivo, cultural y social.

En cuanto a la didáctica en las matemáticas podemos ver su importancia en base a que ésta contribuye a la construcción de modelos teóricos, para poder explicar de una forma diferente los respectivos temas de estudio.

“La presencia de la Didáctica de la Matemática en una sociedad contemporánea la consideramos como un índice de la calidad de su actividad intelectual y de los servicios sociales que tienen lugar en ese medio.” (Rico 36). Por ello se considera a la didáctica como pilar fundamental para la enseñanza de la matemática, ya que mediante este método se puede realizar un proceso enseñanza-aprendizaje de manera eficaz. La propuesta cumplirá con los requisitos que se necesitan para que una educación tenga pleno éxito, pues basados en la didáctica y su importancia en la enseñanza plantearemos una serie de actividades donde consten materiales didácticos y manipulables que sean para el estudiante el medio por el que interprete e interiorice la matemática de mejor manera.

1.4 El aprendizaje significativo

Para el norteamericano David Ausubel quien elaboró la teoría del aprendizaje significativo que es muy distinta al aprendizaje memorístico, dice que el estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, lo que le da sentido y significado a su aprendizaje. Por lo tanto para el estudiante, el aprender se vuelve más beneficioso, además la presencia del profesor es fundamental en este aprendizaje pues es un mediador que facilita esa relación, por lo cual esta enseñanza, integra, mejora y completa los conocimientos anteriores. En este sentido, Antonio Arroyo en su libro: “El departamento de orientación: atención a la diversidad”, manifiesta lo siguiente:

“Si la conexión del nuevo material de aprendizaje es arbitraria o mejor dicho no se integra mediante la comprensión, se producirá tan solo la memorización de un aprendizaje condenado al olvido. Desde esta perspectiva todo aprendizaje significativo supone memorización comprensiva y por otra parte, asegura la funcionalidad de lo aprendido, de modo que se adapte a nuevas situaciones futuras.” (Arroyo 13)

Así el aprendizaje significativo es adquirido por el educando mediante la comprensión puesto que ya no se basa en la simple memorización que es utilizada para la realización de un examen o lección, este tipo de aprendizaje es duradero y útil en la vida diaria, mediante la asimilación de actitudes, conductas, habilidades, informaciones, que son receptadas, lo cual da una interrelación entre el maestro y alumno para que este sea capaz de aprender a aprender.

Ahora, el aprendizaje memorístico no está contrapuesto al aprendizaje significativo, ya que los dos son muy importantes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Mediante el aprendizaje memorístico en una clase de matemáticas se logra aprender las tablas de multiplicar, pero con el aprendizaje significativo se puede utilizar las mismas tablas de multiplicar para aplicarlas a la vida diaria, esto es posible mediante la resolución de problemas.

En el libro “Aprendizaje y Cognición” de Zayra Méndez, encontramos a Ausubel mencionando que en el proceso del aprendizaje significativo, juegan un papel muy importante los inclusores o también llamados “prerrequisitos”, los mismos que pueden transformarse y crecer, así: “El historial de experiencias previas del aprendiz va a determinar el número y la variedad de los inclusores que posee, aspecto esencial que debe ser tomado en cuenta por los educadores.” (Méndez 92). Por lo tanto, el docente debe estar preparado y debidamente capacitado en la utilización de materiales específicos que sirvan de mediadores para el aprendizaje significativo del estudiante.

Con el aprendizaje significativo se pretende que el educando sea el que construya su propio aprendizaje mediante la autonomía, para ello el docente debe ser quien exponga los contenidos esenciales que el estudiante va a adquirir y de esta manera construir su aprendizaje significativo. Además el educando también puede construir su aprendizaje por medio del descubrimiento, este conocimiento lo puede lograr mediante la comparación e interrelación de lo nuevo con lo adquirido anteriormente.

Por lo tanto Ana María Maqueto en su libro: “Lengua aprendizaje y enseñanza”, expone las ideas de David Ausubel de la siguiente manera: “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente.” (Maqueto 30)**.**

Mediante estas ideas básicas, Ausubel se refiere a que el educando al llegar al entorno educativo no es como una caja vacía a la cual se la debe llenar de conocimientos, él se refiere a que el alumno ya conoce diversas cosas y aprendizajes que los adquirió mediante el entorno, ya sea con sus padres o en lo social, es así que el docente debe estar atento a lo que el estudiante conoce, y de ahí partir hacia la enseñanza de nuevos conocimientos que se irán relacionando e incorporando a un aprendizaje significativo.

De acuerdo con Ausubel, el aprendizaje en las personas se lo adquiere de diferentes maneras; memorístico por recepción, descubrimiento o significativo, todo depende de cuánto valor damos a lo que estamos aprendiendo. Además para que se dé el aprendizaje significativo intervienen varios factores, como el estado de ánimo, el tema o contenido a ser tratado, entre otros; por lo que no será de igual importancia para un educando un aprendizaje sobre arte, que un conocimiento acerca de tecnología, todo depende de cada individuo, ya que cada persona posee distintos gustos y es aquí donde debería intervenir la escuela, como lo menciona Howard Gardner: "el objetivo de la escuela debería ser el de desarrollar las inteligencias y ayudar a la gente a alcanzar los fines vocacionales y aficiones que se adecuen a su particular espectro de inteligencias." (Gardner 21)

De la misma forma, para que el aprendizaje por parte de los estudiantes en matemáticas sea significativo, deben relacionar la teoría con la práctica. Además, no tiene que ser memorístico o peor aún mecánico, así lo describe Francisca Ortiz: "Se asume la necesidad de un aprendizaje significativo de las matemáticas y no un aprendizaje memorístico de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos." (Ortiz Rodriguez 45).

En este sentido, las técnicas o mecanismos utilizados en la enseñanza de las matemáticas deben ser estructurados de forma clara y coherente, como parte fundamental para lograr el aprendizaje significativo, es que el estudiante debe estar verdaderamente interesado por la materia o de lo contrario todo lo mencionado quedaría en la nada, esto lo menciona Fuensanta Hernández: “Así mismo es condición necesaria, para que se produzca el aprendizaje significativo en matemáticas, que el alumno tenga una actitud positiva hacia ellas.” (F. Hernandez 21)

En conclusión, como hemos visto los distintos aportes de grandes investigadores en cuanto al aprendizaje significativo, se basan en lo cognoscitivo, ya que la significatividad se da al relacionarse la información recibida con la que ya posee el sujeto, y es necesario para este aprendizaje dos condiciones básicas, la disposición del alumno por aprender y el material adecuado y estructurado sobre la que se trabajará, por lo cual sin estas dos disposiciones mencionadas es imposible que el educando logre el aprendizaje significativo.

1.5 Materiales didácticos y tecnológicos

Al hablar de materiales didácticos y tecnológicos, podemos decir que son todos los recursos que están vinculados a apoyar al profesor en la enseñanza de los contenidos a sus estudiantes o como lo afirma Miguel Calvo Verdú: “Los materiales didácticos son el conjunto de documentos textuales, gráficos, audiovisuales, etc., que sirven de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje y da estructura y soporte documental a los contenidos.” (Verdú 96)

Ahora bien, en las distintas instituciones educativas los maestros han utilizado y manipulado algún recurso o material que le ayude o facilite en su proceso de enseñanza. Por tanto se puede decir que los materiales didácticos son elementos primordiales para realizar una clase, y mediante estos, el estudiante podrá captar con facilidad los temas expuestos, además estos materiales pueden ser utilizados para llamar su atención mejorando su concentración y retención de diversa información receptada.

Sin embargo existe una diferencia entre materiales didácticos y tecnológicos, es así: Los materiales didácticos pueden ser concretos, es decir, que se los puede manipular y gracias a ellos permiten que el estudiante experimente el concepto de estimulación de los sentidos, así interiorizará los conocimientos que son transmitidos por el docente, además estos materiales pueden ser objetos de su entorno o elaborados por el docente.

Por lo tanto algunos autores sostienen que los materiales didácticos son instrumentos para unir la teoría con la parte concreta y aplicarla a la vida específicamente, así: “El material didáctico es, en la enseñanza, el nexo entre las palabras y la realidad. Lo ideal sería que todo aprendizaje se llevase a cabo dentro de una situación real de la vida.” (Material didáctico: biblio3 282) Por esto, el material didáctico es una exigencia indispensable en la enseñanza de contenidos para lograr el mayor desempeño en los estudiantes.

Ahora bien, al mencionar material tecnológico o tecnología educativa, rápidamente pensamos en la informática, redes sociales, internet, entre otros, lo cual puede tener varios significados más, como lo menciona Julio Cabero Almenara: “El término tecnología educativa es uno de los más polisémicos que manejamos en el discurso pedagógico actual. Se nos presenta de una forma integradora, viva y polisémica. Integradora en la medida en que se han insertado diversas ciencias, desde la física e ingeniería hasta la psicología y pedagogía.” (Tecnología educativa: diseño y evaluación del medio video: tecnologiaedu 19) En este sentido podemos decir que la didáctica educativa viene integrada en todo campo, ya sea educativo o no. Y con la globalización la facilidad de acceso a información es mucho más fácil puesto que realizar investigaciones sobre distintos temas lo hacemos en pocos minutos.

En la educación, la tecnología es indispensable siendo una gran herramienta que debe ser utilizada por maestros y estudiantes, lo cual ha ido ganando terreno y a la vez va siendo un gran cambio para el mundo, porque domina en todo momento o lugar, para ello los docentes deben recurrir a utilizar los materiales tecnológicos en sus diversas clases y así la enseñanza tradicional que se tenía, poco a poco se vaya eliminando.

También cabe recalcar que en la enseñanza de las matemáticas es necesario la incorporación de recursos tecnológicos o material didáctico para la comprensión de los temas que vaya a tratar el docente. Se dice que: “La utilización de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas no es algo novedoso, ya que los profesores han necesitado y necesitan disponer de situaciones de éxito y eso se consigue ensayando nuevos procedimientos y nuevos recursos en la enseñanza de las matemáticas.” (Checa 60) Así, el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC´s) en la educación plantea a los estudiantes y maestros un cambio primordial de la forma tradicional que se llevaba. Primero a los estudiantes les inculca la responsabilidad y autonomía hacia su aprendizaje, y segundo a los maestros les motiva a seguir preparándose puesto que no serían las únicas fuentes de conocimientos. “La introducción de las TIC en las aulas pone en evidencia la necesidad de una nueva definición de roles, especialmente, para los alumnos y docentes. Los primeros, gracias a estas nuevas herramientas, pueden adquirir mayor autonomía y responsabilidad en el proceso de aprendizaje, lo que obliga al docente a salir de su rol clásico como única fuente de conocimiento” (OREALC 18)

Por un lado hemos mencionado la definición y la importancia de las TIC´s en la educación pero no hemos hablado de los tipos de estos, para ello resumimos brevemente en los siguientes grupos:

Medios audiovisuales. En este grupo están, los retroproyectores, diapositivas, los materiales sonoros y programas de audio.

Medios informáticos. Se refiere a la computadora y programas de aplicación como procesador de palabras, hojas electrónicas, base de datos, programas informáticos diseñados con fines educativos como tutoriales, simuladores, programas multimedia y juegos didácticos.

En conclusión se puede decir que los materiales tecnológicos se han vuelto indispensables en el ámbito educativo, por ello la mayor parte de trabajos se los presenta mediante la tecnología, como presentaciones multimedia, exposiciones de contenidos, material didáctico, etc. Se estaría diciendo que el ser humano y más aún el docente deben forjar una nueva alfabetización digital y tecnológica para no quedar al margen de los cambios en la educación e ir a la par para poder guiar a sus estudiantes en el camino de la educación de calidad.

CAPÍTULO 2

DIAGNÓSTICO

2.1 Población y muestra

2.1.1 Población

La población o también llamado universo es el conjunto de todos los elementos o individuos que se desea estudiar y para el cual son válidas las conclusiones que se obtengan. Además existe una diferencia importante cuando no se estudia a toda la población sino solo una parte, así lo menciona Carmen Fuentelsaz: “Cuando se conoce el número de individuos que la componen, se habla de población finita y cuando no se conoce su número, se habla de población infinita.” (Fuentelsaz Gallego, Icart Iser y Pulpón Segura, Elaboración y presentación de un proyecto de investigación y una tesina 55)

En este sentido, según los objetivos fijados y el problema planteado en nuestro trabajo de investigación se conformó de un tipo de población finita la misma estuvo delimitada por treinta y cinco estudiantes (35) específicamente de la carrera de Matemáticas y Física de la “Universidad de Cuenca” que han cursado la materia de Álgebra Elemental en el periodo comprendido entre el año 2014 – 2015.

2.1.2 Muestra.

“Es el grupo de individuos que realmente se estudiarán, es un subconjunto de la población.” (Fuentelsaz Gallego, Icart Isern y Pulpón Segura 55) Así lo describe Carmen Fuentelsanz en su libro “Elaboración y presentación de un proyecto y una tesina.” Y en este sentido, nuestro estudio se basó en el tipo de muestreo intencional para el grupo de estudiantes de segundo ciclo, en el cual: “Una muestra intencional escoge sus unidades no en forma fortuita sino completamente arbitraria, designando a cada unidad según características que para el investigador resulten de relevancia.” (Sabino 93) Este tipo de muestra se fundamenta en los siguientes criterios:

- Ser estudiante de la carrera de Matemáticas y Física.
- Haber cursado la asignatura de Álgebra Elemental.

2.2 Métodos y técnicas.

Para que nuestro trabajo tenga validez, tenemos que recolectar las evidencias sobre el problema planteado, y para conseguir esto disponemos de métodos y técnicas de investigación como lo dice Raúl Rojas: “Los métodos y las técnicas son las herramientas metodológicas de la investigación, ya que permiten instrumentar los distintos procesos específicos de ésta” (Rojas Soriano 92), es aquí donde entran los diferentes métodos y técnicas para la correcta recolección de los datos que necesitemos. Así lo afirma Oscar Zapata: “En los trabajos de investigación con metodología cuantitativa, las técnicas más utilizadas son: el experimento, la encuesta o el sondeo y el análisis de contenido.” (Zapata 187)

Es así que escogimos la encuesta como la técnica para recabar la información necesaria y el cuestionario como el instrumento que lo respalde, así mismo lo dice Oscar Zapata, “las técnicas más utilizadas son las encuestas, como el medio típico para comprobar hipótesis; a su vez, el instrumento que se utiliza para levantar las encuestas es el cuestionario" (Zapata 188) Para esta investigación se utilizó un tipo de encuesta dirigido a los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física que constó de 11 ítems y su estructura fue la siguiente:

- Membrete de la Universidad de Cuenca.
- Identificación del instrumento.
- Instrucciones generales.
- Presentación de preguntas.
- Opciones de respuesta.

Cabe indicar que en este instrumento se plantearon preguntas específicas, con la finalidad de recabar información suficiente sobre los métodos y técnicas utilizados por el docente al momento de impartir sus conocimientos, los recursos que posee la universidad en cuanto a materiales didácticos, la importancia de un laboratorio de matemáticas, el desempeño que tendría al contar con un laboratorio y sobre todo el aporte en general que tendría un laboratorio de matemáticas y el adecuado material didáctico.

2.3 Resultados, tabulación y análisis de la información

De acuerdo a las preguntas realizadas en la encuesta a los estudiantes de segundo ciclo de la carrera de Matemáticas y Física, se pudo obtener información de su opinión en cuanto a los recursos didácticos utilizados y a su importancia dentro de la materia de Álgebra Elemental.

ENCUESTA A LOS ESTUDIANTES: Tamaño de la población: 35 estudiantes.

1.- ¿Con qué frecuencia le gustaría que sus profesores de matemáticas utilicen material didáctico?

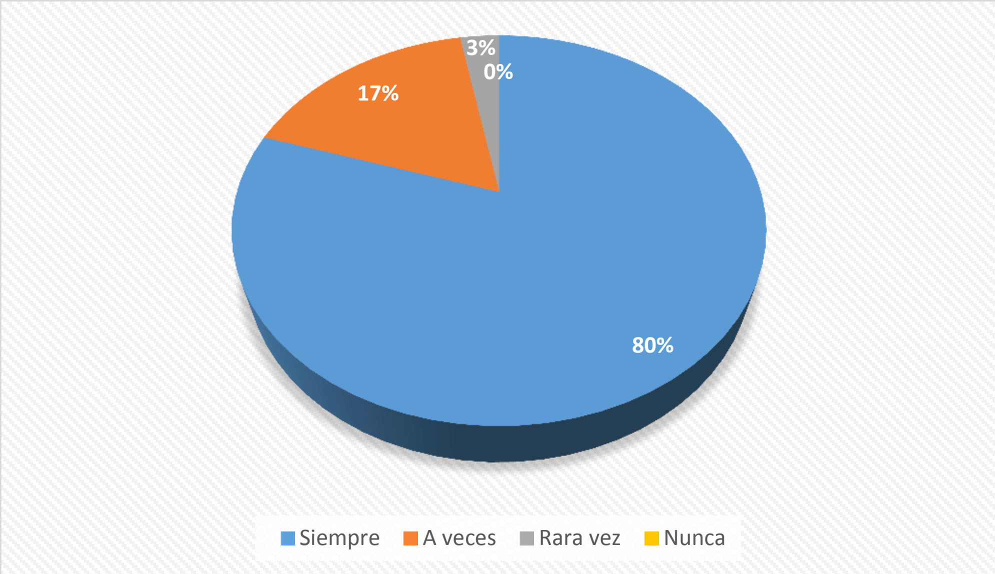


Figura 2.3.1. Sugerencia del uso de material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	28	80%	35
A veces	6	17%	35
Rara vez	1	3%	35
Nunca	0	0%	35

Tabla 2.3.1. Sugerencia del uso de material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Como conclusión podemos decir que a la mayoría de estudiantes les gustaría que sus profesores utilicen siempre material didáctico, es decir, el 80% y un porcentaje mínimo opina, a veces, rara vez y nadie opina que nunca le gustaría.

2.- ¿Qué tan importante cree que es la utilización del material didáctico para el aprendizaje de matemáticas?

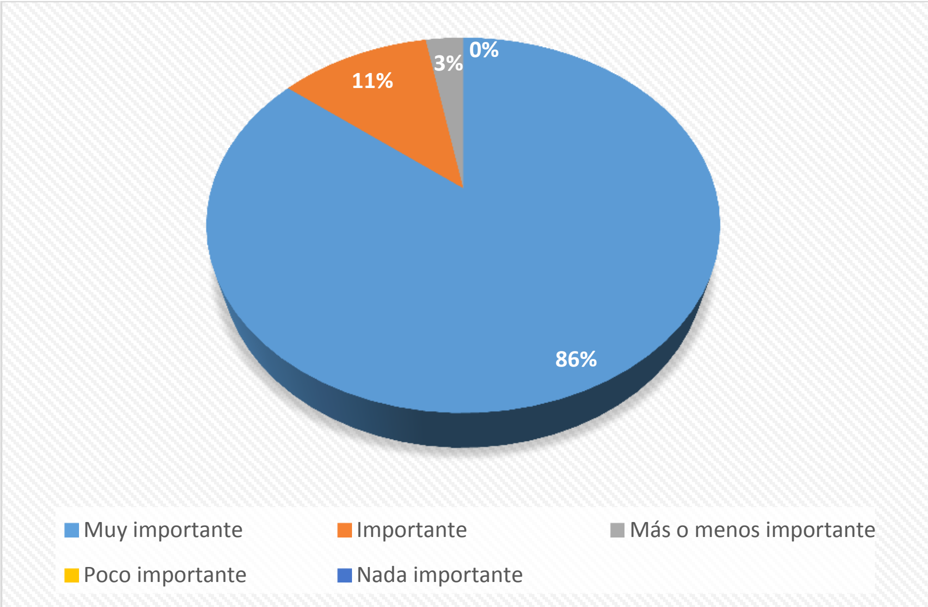


Figura 2.3.2. Importancia del uso del material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Muy importante	30	86%	35
Importante	4	11%	35
Más o menos importante	1	3%	35
Poco importante	0	0%	35
Nada importante	0	0%	35

Tabla 2.3.2. Importancia del uso del material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Se puede evidenciar en la opinión de los estudiantes que la importancia del material didáctico es muy significativo, aunque un 3% opina que es mas o menos importante.

3.- En general, ¿cómo aprende las matemáticas?

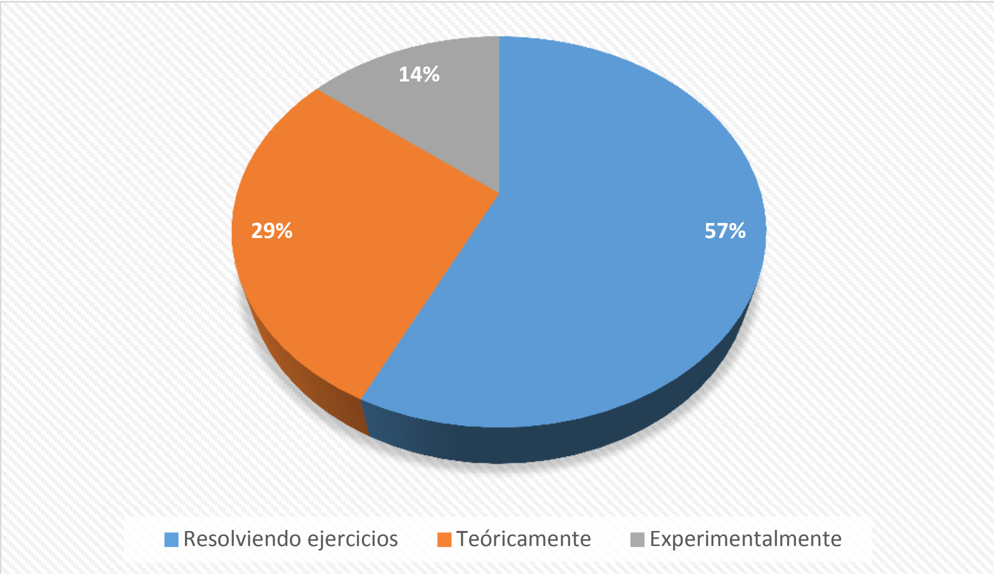


Figura 2.3.3. Métodos de aprendizaje de las matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Resolviendo ejercicios	20	57%	35
Teóricamente	10	29%	35
Experimentalmente	5	14%	35

Tabla 2.3.3. Métodos de aprendizaje de las matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Podemos notar que los estudiantes aprenden más resolviendo ejercicios y vemos que un bajo porcentaje opina que experimentalmente, esto nos dice que no han desarrollado ejercicios con material didáctico.

4.- En matemáticas, usted recuerda más:

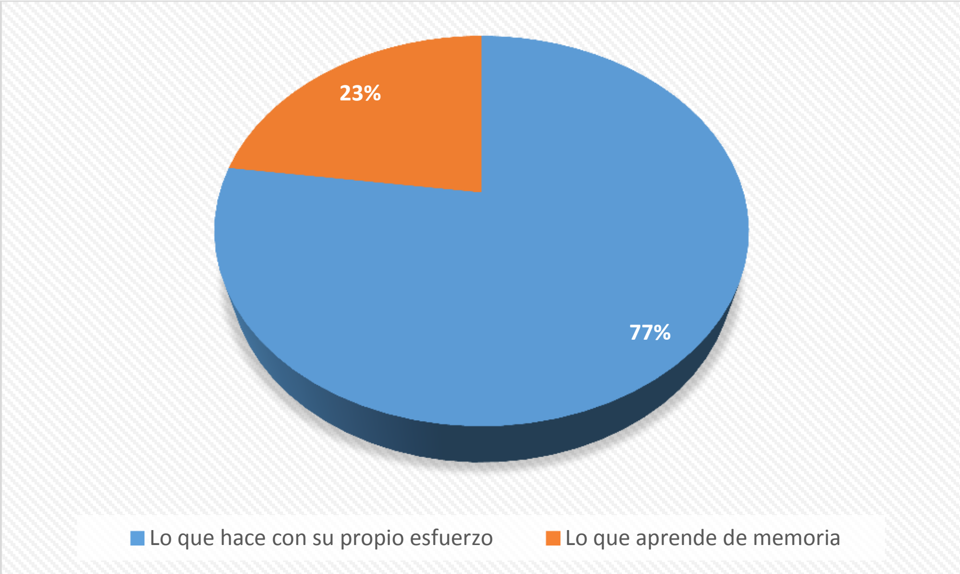


Figura 2.3.4. Formas de recordar las matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Lo que hace con su propio esfuerzo	27	77%	35
Lo que aprende de memoria	8	23%	35

Tabla 2.3.4. Formas de recordar las matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

En conclusión podemos decir que la mayoría de los encuestados (77%) opina que al aprender matemáticas, recuerda más lo que hacen con el propio esfuerzo frente al (23%) que opina que recuerdan lo que aprenden de memoria.

5.- ¿Usted considera que si le enseñan matemáticas con material didáctico mejoraría su rendimiento académico?

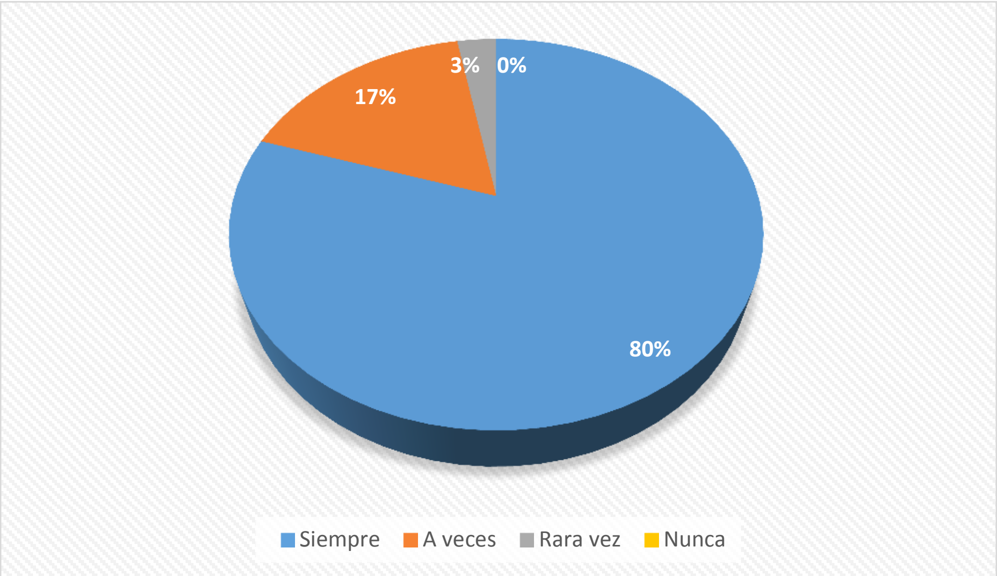


Figura 2.3.5. Opinión sobre el rendimiento académico al utilizar material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	28	80%	35
A veces	6	17%	35
Rara vez	1	3%	35
Nunca	0	0%	35

Tabla 2.3.5. Opinión sobre el rendimiento académico al utilizar material didáctico

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

El 80% considera que si siempre les enseñaran las matemáticas con material didáctico, mejorarían su rendimiento. En cambio el 17% considera que a veces mejoraría su rendimiento y un 3% considera que rara vez mejoraría su rendimiento.

6.- ¿El/la profesor/a de Álgebra Elemental, ha utilizado material didáctico en sus clases?

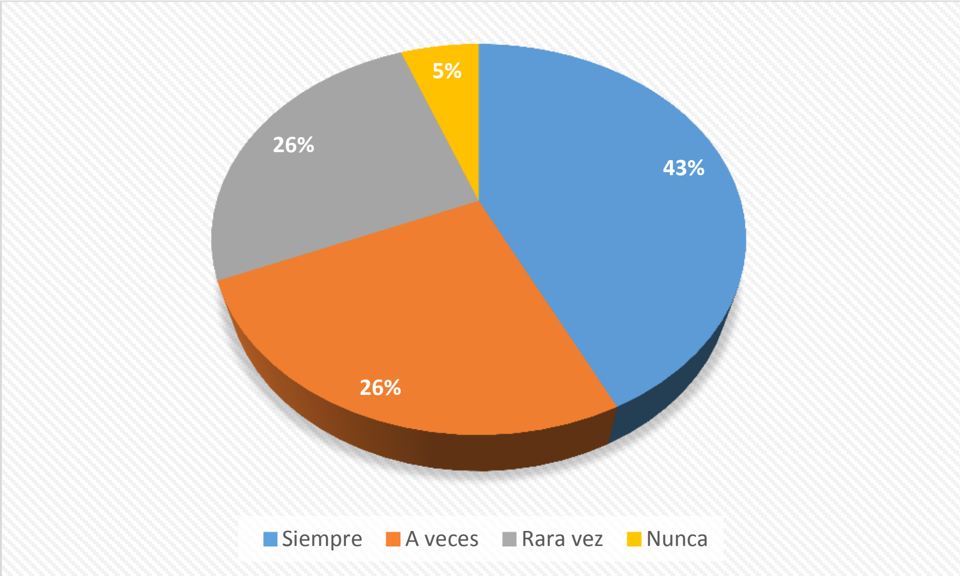


Figura 2.3.6. Uso de material didáctico por parte del profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	15	43%	35
A veces	9	26%	35
Rara vez	9	26%	35
Nunca	2	6%	35

Tabla 2.3.6. Uso de material didáctico por parte del profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Se puede evidenciar que menos del 50% opina que no se ha utilizado material didáctico en la materia de Álgebra Elemental. En cambio más del 50% opina que a veces, rara vez y nunca se utiliza.

7.- En el caso de haber utilizado material didáctico o tecnológico, el/la profesor/a ha utilizado:

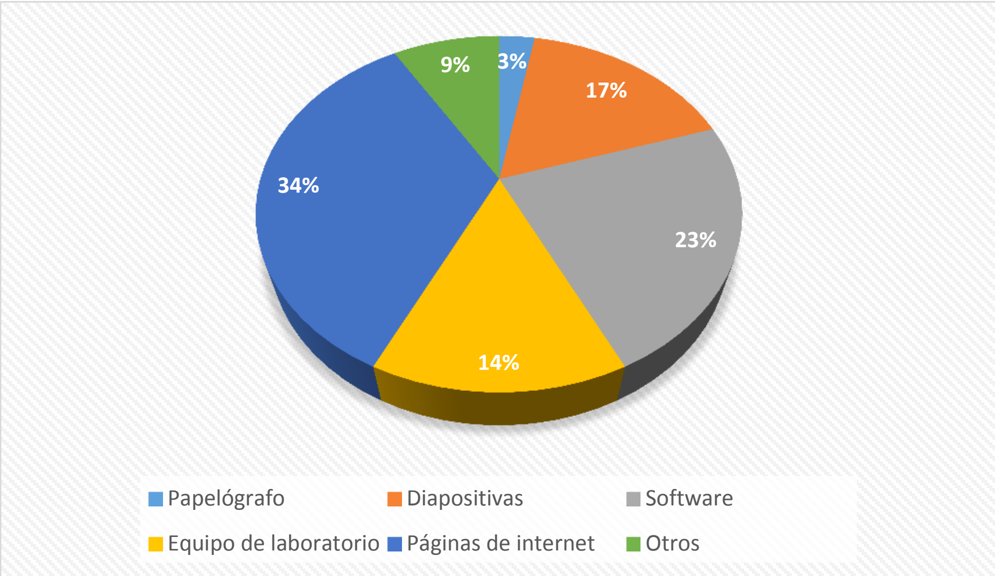


Figura 2.3.7. Material didáctico o tecnológico utilizado por el profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Papelógrafo	1	3%	35
Diapositivas	6	17%	35
Software	8	23%	35
Equipo de laboratorio	5	14%	35
Páginas de internet	12	34%	35
Otros	3	9%	35

Tabla 2.3.7. Material didáctico o tecnológico utilizado por el profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Las encuestas revelan que los profesores de Álgebra Elemental han utilizado como material didáctico, las páginas de internet pero en cuanto a equipo de laboratorio, ha sido muy poco.

8.- ¿Cree que el material didáctico utilizado por el/la profesor/a fue adecuado para la clase?

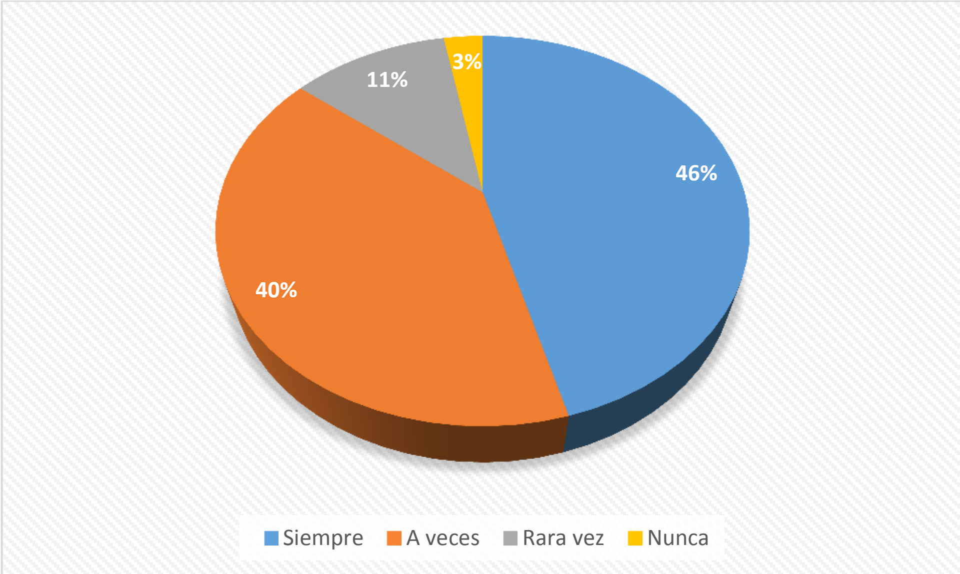


Figura 2.3.8. Eficacia sobre el material didáctico utilizado en clases

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	16	46%	35
A veces	14	40%	35
Rara vez	4	11%	35
Nunca	1	3%	35

Tabla 2.3.8. Eficacia sobre el material didáctico utilizado en clases

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Existen opiniones divididas en cuanto a si es adecuado el material utilizado por el profesor. Sin embargo, si sumamos los porcentajes de nunca (3%), rara vez (11%) y a veces (40%), suman más del 50% de estudiantes tienen una opinión baja en cuanto al correcto uso en la clase.

9.- En general, ¿cómo le parecieron los materiales didácticos utilizados por el profesor en la asignatura de Álgebra Elemental?

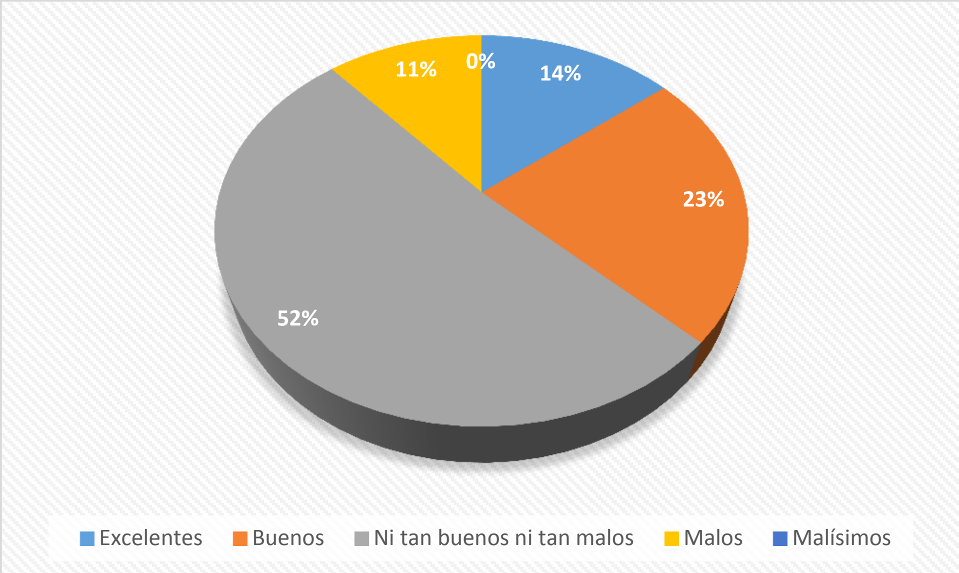


Figura 2.3.9. Opinión sobre el uso de material didáctico utilizados por el profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Excelentes	5	14%	35
Buenos	8	23%	35
Ni tan buenos ni tan malos	18	51%	35
Malos	4	11%	35
Malísimos	0	0%	35

Tabla 2.3.9. Opinión sobre el uso de material didáctico utilizados por el profesor

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Se concluye que los materiales didácticos no son tan buenos ni tan malos, ya que representa al 51% de la opinión de los estudiantes. Solo unos pocos opinan que son buenos y malos.

10.- ¿Cree usted que es importante un laboratorio de matemáticas?

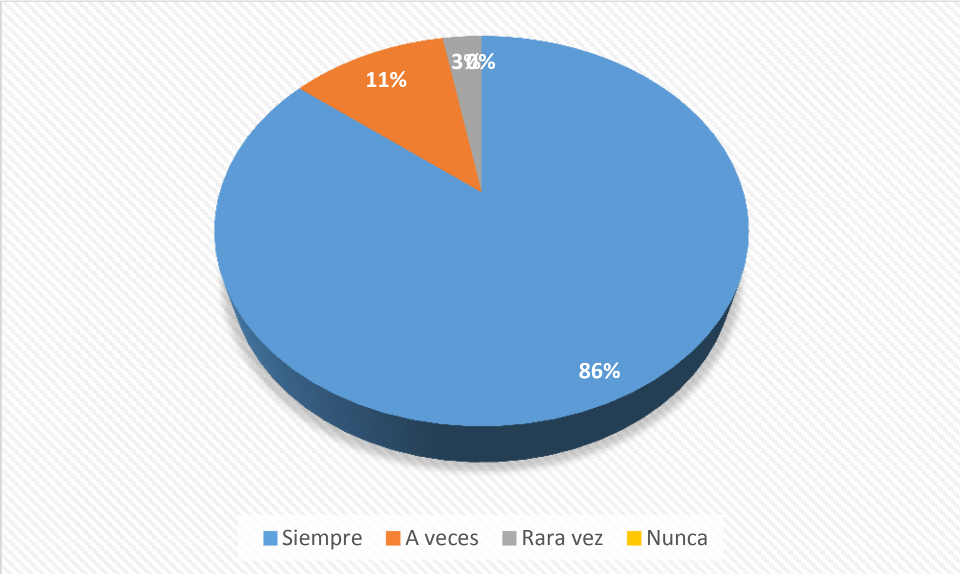


Figura 2.3.10. Importancia de un laboratorio de matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	30	86%	35
A veces	4	11%	35
Rara vez	1	3%	35
Nunca	0	0%	35

Tabla 2.3.10. Importancia de un laboratorio de matemáticas

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Es fácil ver en nuestra grafica de pastel, cómo se evidencia que es muy importante la implementación de un laboratorio de matemáticas en la institución.

11.- ¿Cree que la utilización de recursos tecnológicos, ayuda a los docentes a mejorar la actividad educativa?

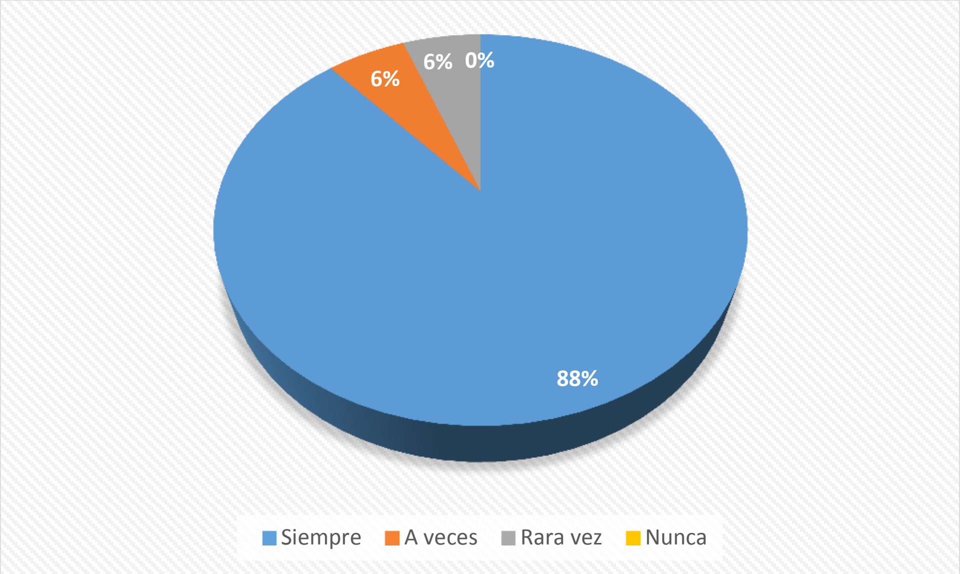


Figura 2.3.11. Sugerencia sobre el uso de recursos tecnológicos

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Variables	Número de estudiantes	Porcentaje (%)	Total de estudiantes
Siempre	31	89%	35
A veces	2	6%	35
Rara vez	2	6%	35
Nunca	0	0%	35

Tabla 2.3.11. Sugerencia sobre el uso de recursos tecnológicos

Elaborado por el investigador
Fuente: Investigación personal

Es importante la utilización de recursos tecnológicos que se relacionen mucho con las matemáticas para mejorar la calidad educativa, así lo demuestran las opiniones de los estudiantes que ya tuvieron la materia de Álgebra Elemental.

2.3.1 Conclusiones

Los resultados de las encuestas demuestran que los estudiantes prefieren que en la mayoría de las clases se les imparta utilizando material didáctico, así el rendimiento y aprendizaje sería mejor pero sin dejar de lado la teoría.

Por otro lado, podemos concluir que el material utilizado por los docentes como por ejemplo las páginas de internet, el software o equipo de laboratorio, no es el adecuado para desarrollar correctamente las clases por ende se necesita de los adecuados implementos tanto de tipo tecnológico como de tipo concreto.

Finalmente concluimos en la importancia de un laboratorio de matemáticas para desarrollar actividades con un mejor aprendizaje ya que la manipulación de material didáctico, la utilización de las TIC´s y los juegos matemáticos son fundamentales en el proceso educativo de los estudiantes y les permite que los temas sean comprendidos de una forma distinta a la tradicional.

2.3.2 Recomendaciones

Se recomienda que la institución haga gestiones para la implementación de un laboratorio de matemáticas para la carrera de matemáticas y física, ya que es de suma importancia para los estudiantes, así ellos podrán reforzar sus conocimientos teóricos y de esta manera puedan llevarlos después para aplicar en su vida profesional cuando la ocasión lo requiera.

Además a los profesores de la carrera de matemáticas y física, es importante que utilicen distintas formas para impartir sus clases; estos pueden ser con material didáctico y tecnológico o por medio de pequeños juegos matemáticos. Y sobre todo utilizar material concreto creado por ellos mismos para motivar a sus estudiantes que sean creativos y puedan cambiar el temor al aprender matemática por parte de los estudiantes del colegio.

CAPÍTULO 3

PROPUESTA

3.1 Presentación

La siguiente obra, que constituye la parte práctica del Álgebra Elemental, está dirigida a los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Facultad de Filosofía de la Universidad de Cuenca que necesiten la ayuda didáctica de cada uno de los siguientes temas que conforman el mundo del álgebra, tanto para su entendimiento y comprobación de cada uno de los algoritmos matemáticos.

GUÍAS DE LABORATORIO

Las presentes guías de laboratorio serán un complemento del aprendizaje de los diferentes temas que forman parte del Álgebra Elemental. En este capítulo los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física, realizarán las respectivas actividades relativamente sencillas incluidas en las guías del laboratorio.

El tipo de formato de cada guía de laboratorio tendrá los siguientes puntos:

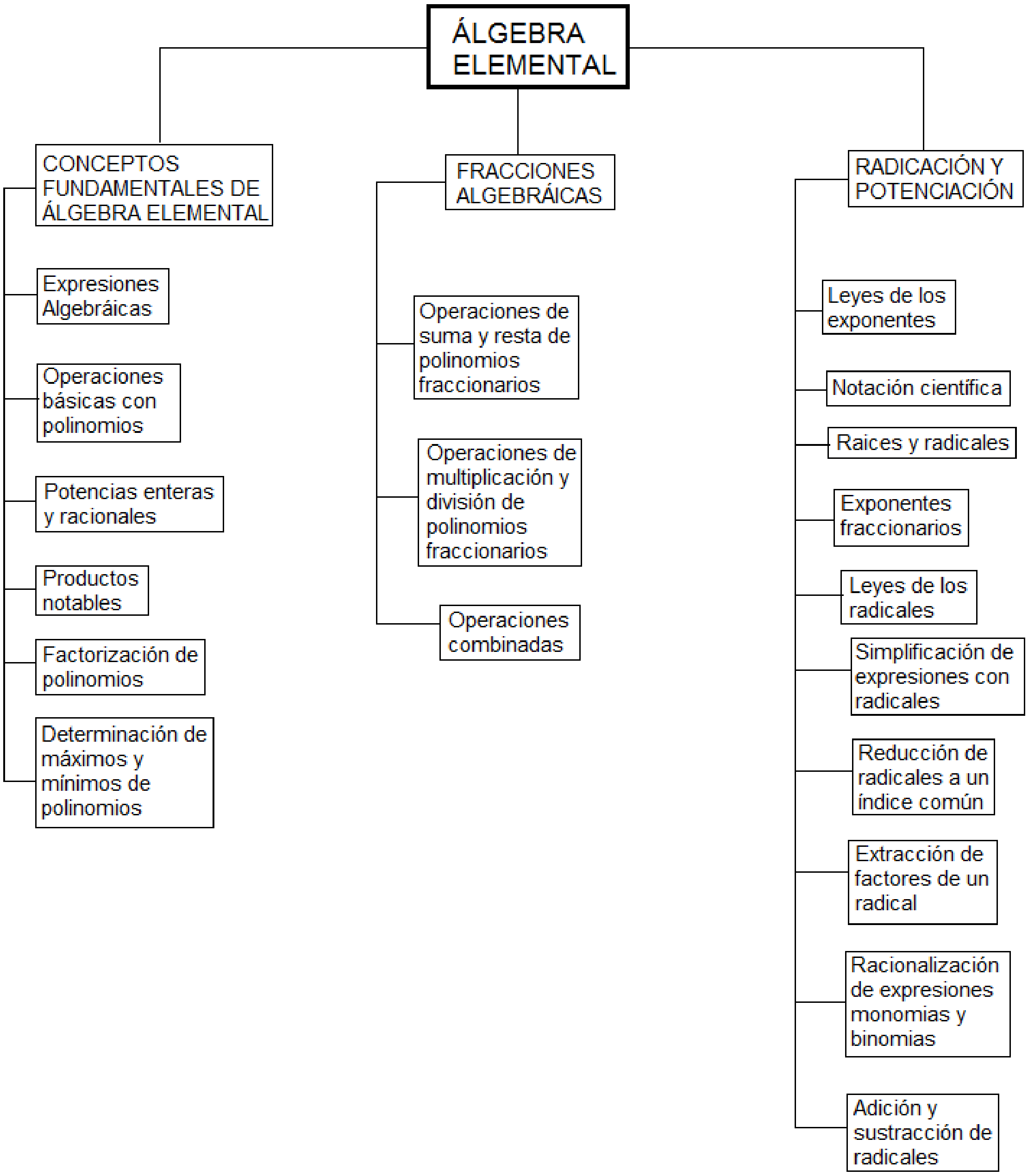
1. Título de la guía
2. Objetivo
3. Teoría
4. Materiales
5. Procedimiento

En las distintas guías, el estudiante contará con un material didáctico que estará presente en el laboratorio, y en ciertos casos se podrán realizar juegos como rompecabezas y dominós. En lo que corresponde al procedimiento se señala detalladamente cada paso que el estudiante debe realizar, numeral por numeral.

Las imágenes y las tablas que se presentan en cada guía de laboratorio son exclusivas de los autores.

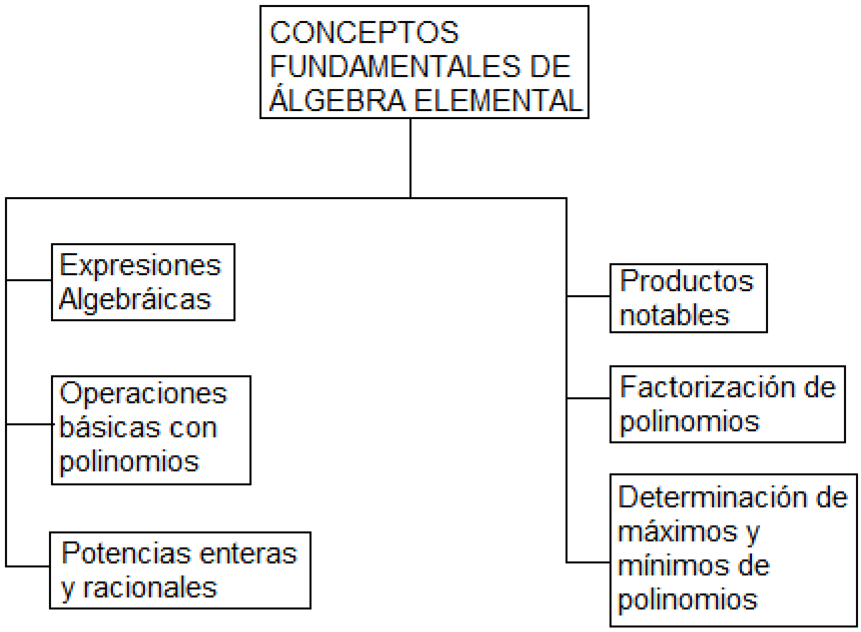
3.2 Estructura de la propuesta

ESTRUCTURA DE LOS TEMAS DE ÁLGEBRA ELEMENTAL



3.3 Desarrollo de la propuesta

3.3.1 ESTRUCTURA DE LOS SUBTEMAS DE CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ÁLGEBRA ELEMENTAL



UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Expresiones algebraicas

3.3.1.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

OBJETIVO: Identificar los elementos que conforman algunas expresiones algebraicas.

Teoría

Una expresión algebraica está formada por coeficientes, literales, un signo y el grado de dicha expresión, a su vez, dichos elementos no están separados entre sí.

$$2x, \quad -7xy, \quad \frac{3}{5}ab$$

Los coeficientes: Son cualquier tipo de número, ya sea entero, fraccionario, racional, irracional, etc. Generalmente se escribe como primer factor de la expresión.

$$3x, \quad \sqrt{12}y, \quad \frac{6}{7}xy$$

Los coeficientes son $3, \quad \sqrt{12}, \quad \frac{6}{7}$ respectivamente.

Los literales: Constituidas por las letras del alfabeto, en particular van escritas después del coeficiente y puede ser una o varias en una misma expresión.

$$7abc, \quad 2xy, \quad 9fgh$$

Así, los literales son $abc, \quad xy, \quad fgh$

Los signos: Se los representa con (+) a los positivos y (-) a los negativos. En expresiones el signo (+) puede excluirse delante del término algebraico.

$$5xy, \qquad -8abc$$

Grado de un término algebraico: Existe dos tipos de grados en una expresión algebraica, estos son:

- Grado Absoluto
- Grado con relación a una letra

El grado absoluto de una expresión algebraica consiste en la suma de todos los exponentes de cada literal que esta contenga.

Ejemplo.

$$3x^2y^3$$

El grado absoluto sería la suma del exponente de x y la de y, osea

$$2+3=5$$

Entonces, la expresión algebraica es de quinto grado

El grado con relación a una letra en cambio hace referencia al exponente de cada literal que conforma dicha expresión.

Ejemplo.

$$5x^5y^3$$

Con relación a x es de quinto grado y con relación a y es de tercer grado.

GUÍA 1: Formación de expresiones algebraicas con fichas de madera

MATERIALES:

- ✓ Fichas con coeficientes
- ✓ Fichas con literales
- ✓ Fichas con literales elevados a una potencia

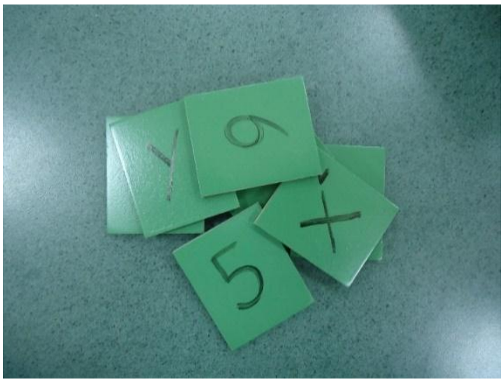


Figura 3.3.1.1.1. Fichas diversas

PROCEDIMIENTO:

1- Tomamos tres tipos de piezas, por ejemplo; uno de contenga al coeficiente, otra que contenga un literal sin potencia y otra que contenga un literal con potencia.

Figura 3.3.1.1.2. Fichas seleccionadas

2- Formamos la expresión algebraica en la que conste las tres fichas escogidas, primero el coeficiente, luego la parte literal sin importar el orden.

Figura 3.3.1.1 3. Fichas formando una expresión algebraica

3- Nos ubicamos en la tabla de datos, escribimos la expresión algebraica en el primer casillero y llenamos los casilleros restantes identificando los elementos respectivos. Ver: Tabla 3.3.1.1.1

CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE

Realizar nueve tipos de expresiones algebraicas de distintas formas en los que incluyan también coeficientes negativos.

TABLA DE DATOS			
Expresiones Algebraicas	**Coeficientes**	**Literal /es**	**Grado absoluto de la Expresión**
$5x^2y$	5	x, y	3

Tabla 3.3.1.1.1 Tabla de datos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Operaciones Básicas con Polinomios

3.3.1.2 OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

OBJETIVO: Comprobar el resultado de algunas operaciones con polinomios mediante la utilización de piezas de diferentes áreas.

Teoría

Los polinomios están formados por dos o más términos algebraicos

$$a + b, \quad 2xy - 5b^2 + 3, \quad 7ax + 4xy - 3ab - 6$$

Los términos que contengan dos expresiones algebraicas se denominan **binomios**, y los que constan tres expresiones algebraicas **trinomios.**

En álgebra elemental se pueden realizar las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división de polinomios. Para ello, nos basaremos en algoritmos que nos ayudarán a resolver cada una de las diferentes operaciones.

Suma de polinomios

De acuerdo con la aritmética a la suma la consideramos como aumento, pero cuando nos referimos al álgebra tenemos que prolongar este significado como un aumento, reunión y disminución, ya que en este campo matemático consideramos números negativos. Ejemplo:

Si sumamos a y b el resultado sería $a + b$, pero si sumamos a y $-b$ la respuesta sería $a - b$ lo cual en aritmética se trataría de una resta.

Para sumar polinomios realizamos los siguientes pasos:

1.- Colocamos un polinomio debajo del otro de tal forma que los términos semejantes de cada polinomio queden en columna.

2.- Se procede a realizar la reducción de cada término semejante separándolos a cada uno de ellos por su respectivo signo.

Ejemplo:

Sumar $8a + 5b - 6c$ y $3a - 6b + 4c$

Paso 1: $\mathbf{8a + 5b - 6c}$

$\underline{\mathbf{3a - 6b + 4c}}$

Paso 2: $\mathbf{8a + 5b - 6c}$

$\underline{\mathbf{3a - 6b + 4c}}$

$\mathbf{11a - b - 2c}$

Resta de polinomios

Al igual que en aritmética, la resta, consiste en encontrar la diferencia de dos términos como son el minuendo y el sustraendo. Consiste en dos pasos importantes que nos llevarán a resolver esta operación.

1. Escribimos el minuendo como da el ejercicio, a continuación escribimos el sustraendo debajo del primer polinomio de tal manera que los términos semejantes queden en columna, en esta ocasión al sustraendo le cambiamos todos los signos.

2. Procedemos a reducir los términos semejantes y escribirlos separados de sus respectivos signos.

Ejemplo:

Restar $2x + 5y - 8z + 4$ y $10x + 2y + 15z - 16$

Paso 1: $$\mathbf{2x + 5y - 8z + 4}$$

$$\underline{\mathbf{-10x - 2y - 15z + 16}}$$

Paso 2: $$\mathbf{2x + 5y - 8z + 4}$$

$$\underline{\mathbf{-10x - 2y - 15z + 16}}$$

$$\mathbf{-8x + 3y - 23z + 20}$$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios por polinomios se multiplica cada término del multiplicando por los términos del multiplicador. En esta operación se toma en cuenta la ley de los signos y el resultado de ser posible se reduce todos los términos semejantes.

Ejemplo:

Multiplicar $5x - 7$ por $3x + 2$

En la figura 3. 3.1.2.1 se demuestra cómo se realiza el procedimiento.

$$(5x - 7)\ (3x + 2)$$

$$(5x)(3x) + (5x)(2) + (-7)(3x) + (-7)(2)$$

$$15x^2 + \underbrace{10x - 21x}_{\text{términos semejantes}} - 14$$

$$15x^2 - 11x - 14$$

Figura 3. 3.1.2.1. Multiplicación de polinomios

GUÍA 2: Operaciones básicas de polinomios con piezas de madera

MATERIALES:

- ✓ Figuras geométricas de áreas x^2, x y 1

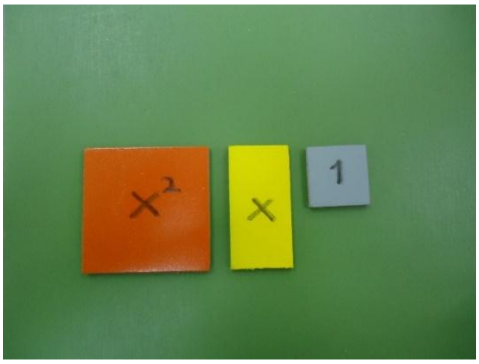


Figura 3. 3.1.2.2. Fichas con diferentes áreas

- ✓ Tablero dividido en dos partes iguales

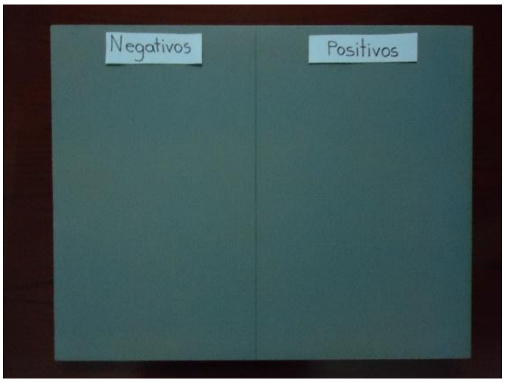


Figura 3.3.1.2.3. Tablero divido en dos partes

PROCEDIMIENTO:

Para el desarrollo de la siguiente guía la realizaremos con los siguientes pasos:

1- En la tabla de datos 3.3.1.1.2 ubicamos el primer ejercicio.

2- Seleccionamos las figuras geométricas de acuerdo a los valores de cada expresión algebraica (figuras con área x^2, x y 1)

3- Ubicamos las figuras en el tablero de tal manera que en el lado izquierdo colocamos a las expresiones negativas y el derecho a las positivas.

4- Retiramos las figuras que son iguales tanto de la derecha como de la izquierda, ejemplo: si tenemos una figura x en la derecha la retiraremos del tablero con una figura x de la izquierda.

5- Al final contamos las figuras que quedaron en el tablero y ese sería el resultado de dicha operación algebraica (no olvidemos colocar el signo de positivos y negativos de acuerdo al lado donde quedaron las figuras).

Ejemplo 1:

Sumar $2x^2 + x - 3$ y $x^2 - 2x + 1$

Tomamos las piezas del primer polinomio

2 piezas de x^2, una de x y tres de 1 y ubicamos en el tablero, positivos en positivos y negativos en negativos.

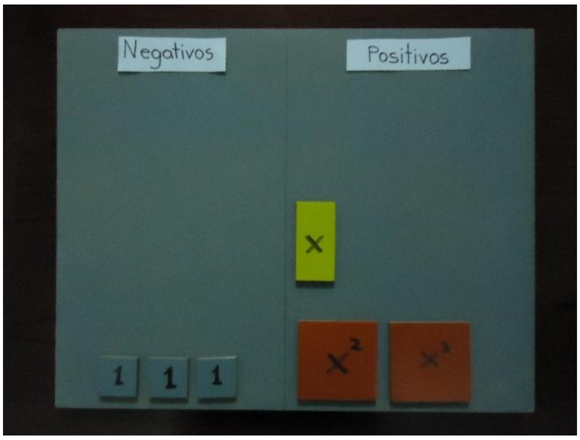


Figura 3.3.1.2.4. Tablero con el primer polinomio

Colocamos las piezas del segundo polinomio que son: una pieza de x^2, 2 piezas de x, y una de 1. De igual manera positivos en positivos y negativos en negativos.

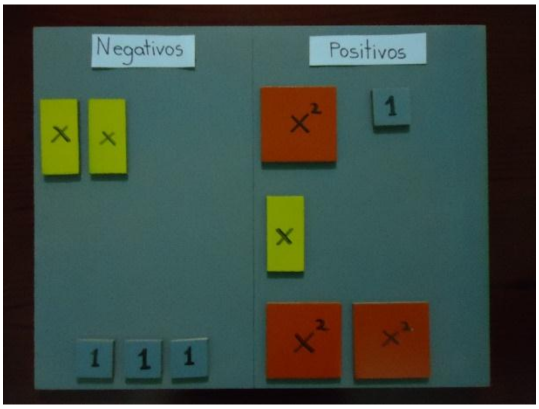


Figura 3.3.1.2.5. Tablero con los dos polinomios

Finalmente retiramos piezas de igual área entre negativos y positivos, estos son: una pieza de área x de los negativos con los positivos y una pieza de área 1 de los positivos con los negativos. Contamos al final las piezas y escribimos el resultado, recordemos que las piezas que se encuentran en el lado negativo de la tabla irán con signo (-).

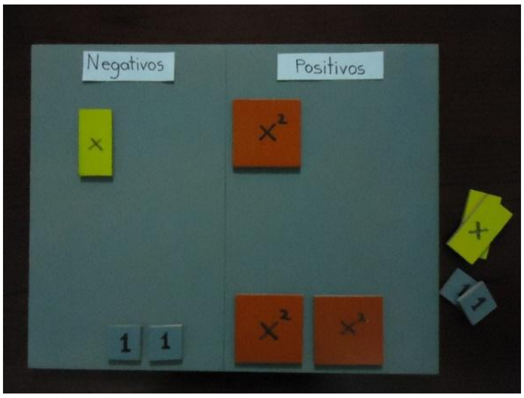


Figura 3.3.1.2.6. Tablero con la suma de dos polinomios

El resultado es: $3x^2 - x - 2$ y lo escribimos en la Tabla 3.3.1.2.1

Ejemplo 2:

Multiplicar $(x + 1)$ por $2x$

Los lados y áreas de las piezas que vamos a utilizar son:

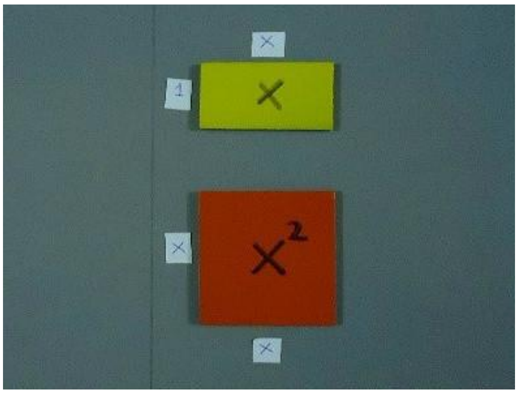


Figura 3.3.1.2.7. Piezas con diferentes áreas

En esta ocasión el multiplicando y el multiplicador serán los lados de una figura geométrica rectangular o cuadrada, por lo tanto debemos ser cuidadosos de ubicar las piezas. Es importante señalar que las piezas al juntarse deben coincidir en sus lados respectivos. La multiplicación de polinomios consiste en completar una figura rectangular o cuadrada y sumar todas las áreas que formarán cada pieza. Ejemplo:

Para ubicar el primer polinomio como un lado de la figura resultante, rectangular o cuadrada que vayamos a obtener, elegimos dos piezas de lado x por x y x por 1 (figura 3.3.1.2.7.) y los colocamos juntos, de manera que el lado **x** de la una pieza coincida con el lado **x** de la otra.

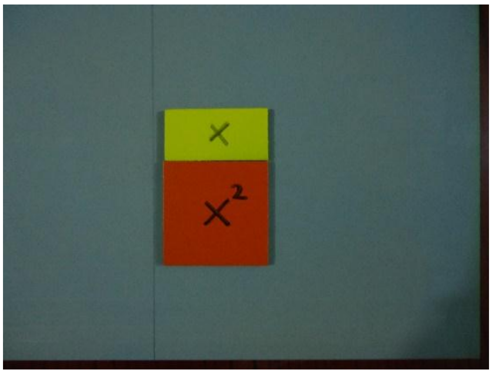


Figura 3.3.1.2.8. Figura de lado (x) y (x+1)

Observamos que en forma vertical hemos formado el lado (x+1) puesto que tenemos un lado **x** más un lado **1**.

El término $2x$ será el otro lado (vertical) de la figura, para ello ubicamos otra pieza de tal forma que coincidan con la pieza de área x^2.

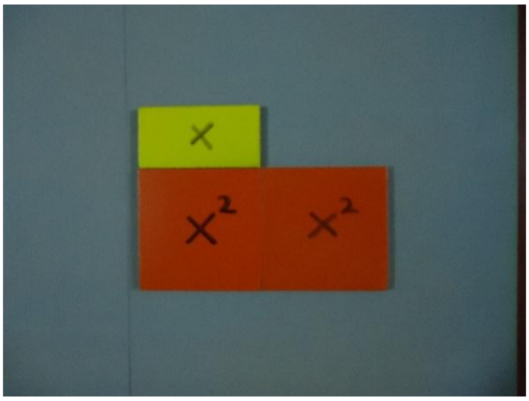


Figura 3.3.1.2.9. Piezas formando los lados (2x) y (x+1)

Observamos que la suma de los lados $(x + x) = 2x$ que es el lado vertical que teníamos que formar.

Finalmente completamos la figura con una pieza que tenga un lado **x** y un lado **1**.

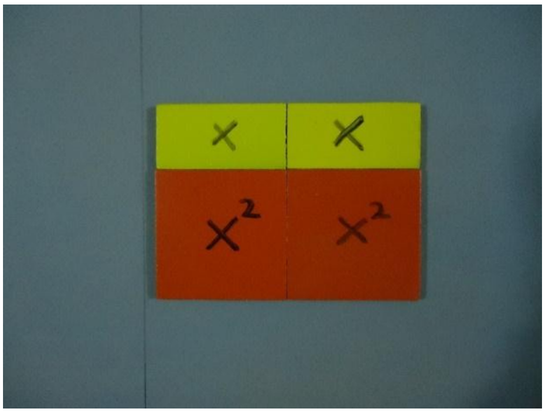


Figura 3.3.1.2.10. Figura rectangular de lados (2x) y (x+1)

El resultado es la suma de sus áreas, $x^2 + x^2 + x + x = \mathbf{2x^2 + 2x}$

CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE

Resuelve las siguientes operaciones con las piezas de madera (figura 3.3.1.2.2.) de áreas x^2, x y 1 que se emplearon en esta guía.

TABLA DE DATOS	
POLINOMIOS	**RESULTADO**
Sumar $2x^2 + x - 3$ y $x^2 - 2x + 1$	$3x^2 - x - 2$
Sumar $x^2 - 5x - 1$ y $7x^2 + 2$	
Multiplicar $5x(x - 2)$	
Restar $x^2 + 2x - 1$ de $2x^2 + 8$	
Multiplicar $x(3 + x)$	
Restar $4x^2 + 4$ de $6x^2 - x + 1$	

Tabla 3.3.1.2.1. Tabla de datos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Potencias enteras y racionales

3.3.1.3 POTENCIAS ENTERAS Y RACIONALES

OBJETIVO: Reconocer cada una de las leyes de las potencias. Desarrollar los ejercicios planteados.

Teoría

Una potencia está constituida por los siguientes elementos:

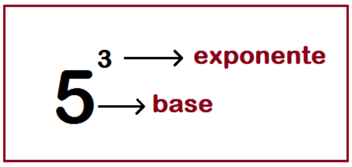


Figura 3.3.1.3.1. Elementos de una potencia

El valor del exponente nos indica la veces que multiplicamos la base por sí misma. En este ejemplo el exponente es **3**, entonces a la base **5** vamos a multiplicar 3 veces.

$$5^3 = 5x5x5$$

Figura 3.3.1.3.2. Forma de expresar una potencia

En álgebra la base de puede estar constituida por un monomio, binomio, trinomio y polinomio, entonces, el exponente nos indicará las veces que vamos a multiplicar estas expresiones por sí misma. En otras palabras, la regla que se aplica en aritmética será la misma para álgebra.

Los términos **enteros** que son la base de la potencia no contienen denominadores con parte literal, como: $5a,\ 3xyz,\ 4a^2b,$ etc.

Los términos **racionales** que son base de la potencia no contienen radical en sus expresiones, como por ejemplo: $\frac{3a}{b}, \frac{4x}{5}, \frac{2}{z}$, etc.

Ejemplo:

$$(4xy)^3 = 64x^3y^3 \qquad \left(\frac{2xyz}{3ab}\right)^5 = \frac{32x^5y^5z^5}{241a^5b^5}$$

GUÍA 3: Rompecabezas de potencias

MATERIALES:

- ✓ Tabla de rompecabezas

Figura 3.3.1.3.3. Rompecabezas

PROCEDIMIENTO:

1- En la tabla de rompecabezas, que está diseñado para este propósito, se encuentran una serie de expresiones algebraicas marcadas en la superficie. Cada pieza del rompecabezas contiene las respuestas de dichas expresiones cuando se eleva a la potencia. El estudiante deberá realizar el respectivo cálculo para saber dónde ubicar la pieza en el tablero. Al final se describirá la imagen de lo que se formó.

Ejemplo:

La primera pieza contiene $(4xy)^3$ así que al resolver esta expresión el resultado sería $64x^3y^3$

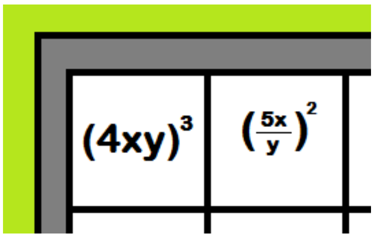


Figura 3.3.1.3.4. Superficie del rompecabezas

2- Buscamos la pieza con este resultado y lo colocamos en el lugar respectivo.

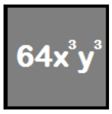


Figura 3.3.1.3.5. Pieza del rompecabezas

3- Procedemos a hacer lo mismo llenando con las demás piezas en sus respectivos lugares, al final obtendremos la imagen que se encuentra oculta.

La imagen oculta es:…………………………………………..

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Productos notables

3.3.1.4 PRODUCTOS NOTABLES

OBJETIVO: Demostrar mediante gráficas el desarrollo de ejercicios de productos notables.

Teoría

Los productos notables son ciertos productos de expresiones que cumplen reglas específicas y que, mediante esto, se puede escribir el resultado de manera directa sin la necesidad de realizar la respectiva multiplicación. Se clasifican en los siguientes productos:

- Cuadrado de la suma de un binomio
- Cuadrado de la diferencia de un binomio
- Producto de la suma por la diferencia de dos binomios
- Cubo de un binomio
- Producto de dos binomios de la forma (x+a) (x+b)

Cuadrado de la suma de binomios: Cuando elevamos al cuadrado un término significa que lo estamos multiplicando por sí mismo dos veces. Así, al elevar al cuadrado $\boldsymbol{a+b}$ tendríamos $(\boldsymbol{a+b})^2$ y esto equivale a $(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a+b})$ por lo tanto:

$$\boxed{(\boldsymbol{a+b})^{\mathbf{2}} = (\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a+b})}$$

Efectuando la respectiva multiplicación de estos dos términos tendremos

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$$

Entonces el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al **cuadrado de la primer término más el doble producto de la primer término por el segundo término más el cuadrado del segundo término**

Cuadrado de la diferencia de un binomio: Si elevamos al cuadrado una diferencia de dos términos algebraicos $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}$ por simple inspección podemos deducir que es igual al producto de esta diferencia $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, entonces:

$$\boxed{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}$$

Si procedemos a resolver la multiplicación de estos dos términos el resultado obtenido es:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})= \boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}$$

Reduciendo términos semejantes

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})= \boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{2ab}+\boldsymbol{b}^{2}$$

Por lo tanto, el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al **cuadrado del primer término menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.**

Producto de la suma por la diferencia de un binomio: Sea $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos términos, entonces el producto obtenido de su suma y su diferencia es $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{b}^{2}$, reduciendo términos semejantes tenemos $\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}$

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}}$$

Podemos deducir que el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades es igual al **cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.**

Cubo de un binomio: Sea $\boldsymbol{a+b}$ un binomio que al elevar al cubo obtendríamos:

$$(\boldsymbol{a+b})^{3} = (\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a+b}) = (\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a+b})^{2}$$
$$= (\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a}^{2} + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^{2})$$

Efectuando la multiplicación $(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a}^{2}+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}) = \boldsymbol{a}^{3} + 3\boldsymbol{a}^{2}\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{ab}^{2} + \boldsymbol{b}^{3}$

Tenemos entonces:

$$\boxed{(\boldsymbol{a+b})^{3} = \boldsymbol{a}^{3} + 3\boldsymbol{a}^{2}\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{ab}^{2} + \boldsymbol{b}^{3}}$$

Luego, el cubo de la suma de dos cantidades es igual al **cubo de la primera cantidad más el triple producto de la primera cantidad al cuadrado por la segunda cantidad, más el triple producto de la primera cantidad por la segunda al cuadrado, más el cubo de la segunda cantidad.**

Producto de dos binomios de la forma $(\boldsymbol{x+a})(\boldsymbol{x+b})$**:** Para obtener el resultado del producto de $(\boldsymbol{x+a})(\boldsymbol{x+b})$ vamos a tener que cumplir tres reglas, pero antes de eso es importante saber que el resultado va a estar conformado por tres términos y estas reglas nos ayudaran encontrar a cada uno de ellos:

1- Realizamos la multiplicación de las primeras cantidades de los dos términos. Ejemplo: $x.x = x^{2}$

2- El coeficiente de la siguiente expresión será la suma de las segundas cantidades de los dos términos. En esta ocasión este número estará acompañado de la $\boldsymbol{x}$ y su exponente será la mitad del valor del exponente que se obtuvo al multiplicar las primeras cantidades.

   Ejemplo: $(a+b)x$

3- La tercera expresión se obtiene al multiplicar los segundos términos de los dos binomios.

   Ejemplo: $a.b$

   Entonces:

$$\boxed{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) = (x.x) + (a+b)x + (a.b)}$$

Ejemplo:

Resolver $(x+2)(x+3)$

La primera expresión se obtiene al multiplicar los primeros términos de los dos factores $x.x = \boldsymbol{x^2}$

La segunda expresión será la suma de $2+3$ acompañado de x, osea $\mathbf{5}\boldsymbol{x}$

La tercera expresión es el producto de las segundas cantidades de los dos términos. $2.3 = \mathbf{6}$

El resultado es: $\boldsymbol{x^2} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}$

GUÍA 4: Formación de cuadriláteros con piezas de madera para resolver productos notables

MATERIALES:

- ✓ Fichas de diferentes áreas.

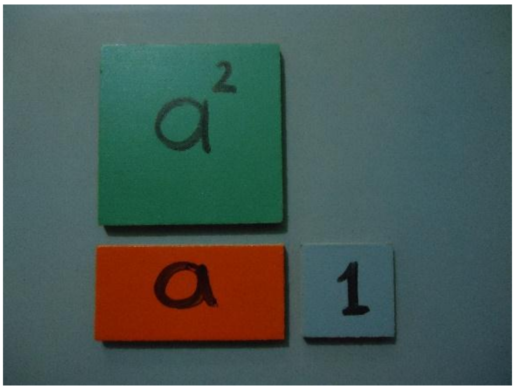


Figura 3.3.1.4.1. Fichas con diferentes áreas

PROCEDIMIENTO:

Cuadrado de la suma de un binomio

Para resolver ejercicios del cuadrado de la suma de dos cantidades mediante las piezas debemos tener en cuenta los siguientes pasos.

1- Elegimos las piezas con las tres áreas diferentes
2- Ubicamos las piezas de tal forma que cada uno de sus lados coincidan con los de las otras piezas
3- El objetivo es formar una figura de 4 lados, para ello si la figura está incompleta hay que completarla con las piezas que encajen.
4- El resultado es la suma de todas las áreas que forman la figura cuadrada o rectangular.

Ejemplo 1:

Resolver:

$$(a+2)^2$$

Para ello utilizaremos las siguientes piezas:

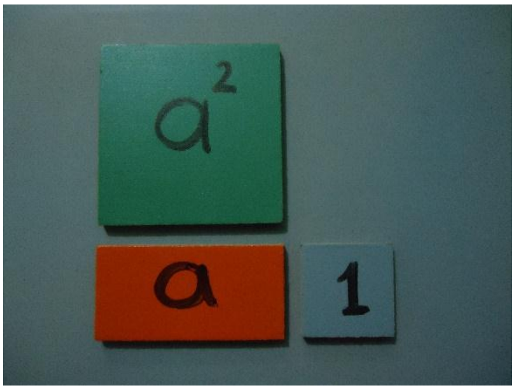


Figura 3.3.1.4.2. Piezas con diferentes áreas

Sabemos que para resolver un cuadrado de las suma de dos cantidades debemos formar una figura cuadrada cuyos lados son iguales y la suma de todas las áreas es el resultado de dicha expresión. Entonces, a esta expresión lo podemos descomponer en dos factores:

$$(a+2)^2 = (a+2)(a+2)$$

Cada factor pertenece a la base y altura (lados) del cuadrado. Por lo tanto colocamos una pieza de lado **a** más dos piezas de lado **1**, de esta forma tenemos el lado $(a+2)$.

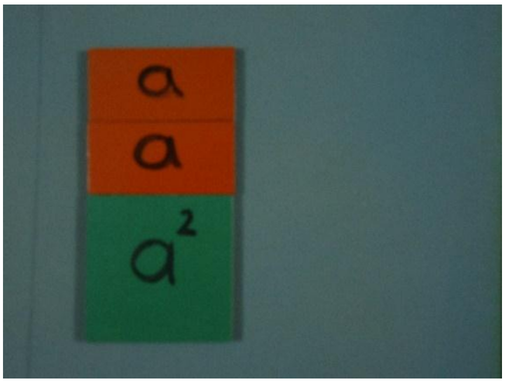


Figura 3.3.1.4.3. Figura rectangular de lados (a) y (a+2)

Realizamos lo mismo con el otro lado del cuadrado, puesto que ya tenemos el lado **a** colocamos dos piezas de lado **1**, de esta forma tenemos el lado $(a + 2)$.

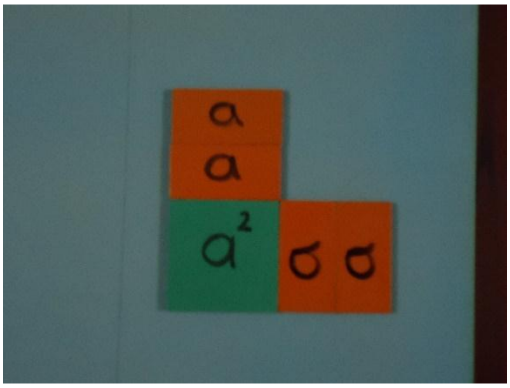


Figura 3.3.1.4.4. Piezas formando un cuadrado de lados (a+2)

Completamos la figura con piezas que coincidan con los lados de las fichas de área **a,** estos son las piezas cuadradas de lado **1**.

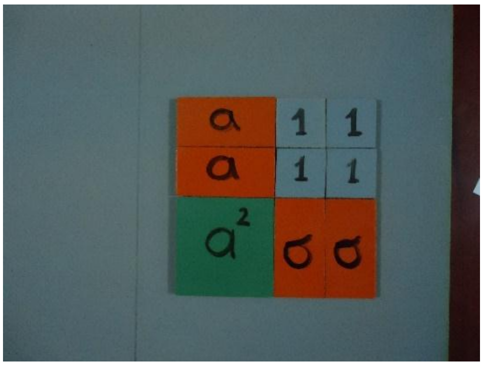


Figura 3.3.1.4.5. Figura cuadrada de lados (a+2)

Finalmente sumamos todas las áreas.

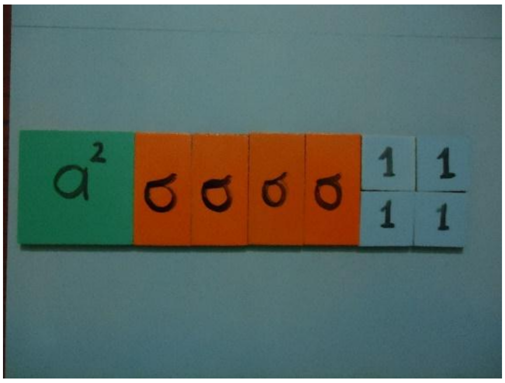


Figura 3.3.1.4.6. Fichas

El resultado es:

$$(a+2)^2 = \boldsymbol{a^2 + 4a + 4}$$

Producto de la suma por la diferencia de un binomio

Para poder representar este producto notable utilizaremos solamente dos fichas, una tijera y un lápiz.

1.- Seleccionamos las fichas de área a^2 y b^2

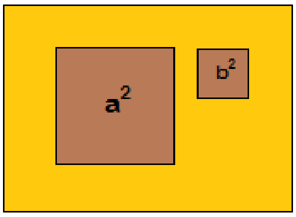


Figura 3.3.1.4.7. Fichas

2.- Colocamos la ficha de b^2 sobre a^2, de esta manera restamos las áreas a^2y b^2, luego el área restante será el resultado de dicha diferencia.

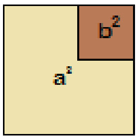


Figura 3.3.1.4.8. Resta de fichas

Luego

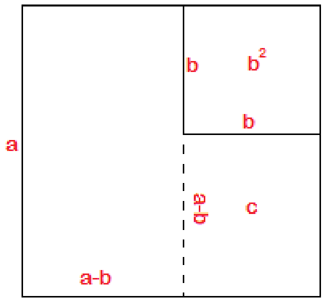


Figura 3.3.1.4.9. Ficha dividida en tres partes con sus respectivos lados

Obtenemos un rectángulo **c** cuyos lados son **b y (a-b).**

1- Recortamos el rectángulo **c** y trasladamos en la forma indicada formando de esta manera un rectángulo A, B, C Y D.

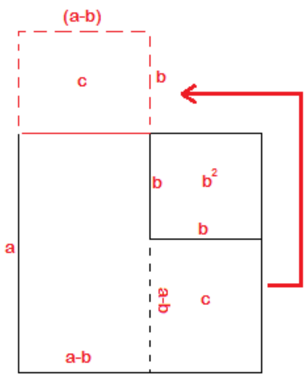


Figura 3.3.1.4.10. Demostración del traslado de la ficha C

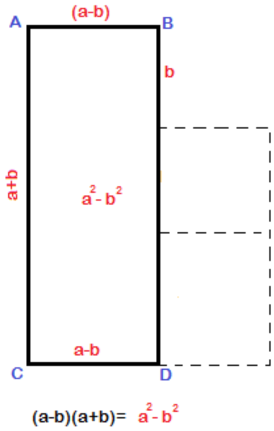


Figura 3.3.1.4.11. Figura resultante de la diferencia de cuadrados

De esta manera el nuevo rectángulo A, B, C, D que es el resultado de la diferencia de las áreas a^2 y b^2 tiene como área el producto de $(a+b)(a-b)$. Luego:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Para la resolución de diferentes problemas con productos notables mediante la utilización de estas piezas el procedimiento es el mismo. Sin embargo en este tipo de ejercicios se trabaja con piezas de papel puesto que se debe recortar.

Ejemplo 2:

1- Dibujamos y cortamos dos piezas cuadradas de papel de diferentes áreas

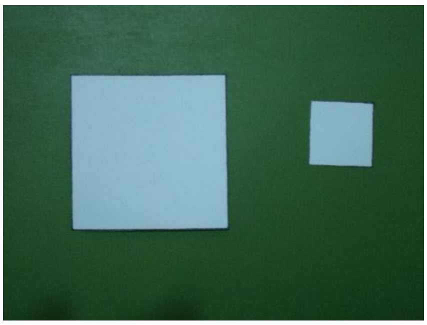


Figura 3.3.1.4.12. Fichas recortadas

2- En la tabla de datos ubicamos el ejercicio $x^2 - 16$, luego, procedemos a escribir el minuendo en la ficha más grande y el sustraendo en la más pequeña, no consideramos el signo (-).Las expresiones escritas son el área de cada figura, por lo que hay que encontrar el valor de sus lados y también escribirlos.

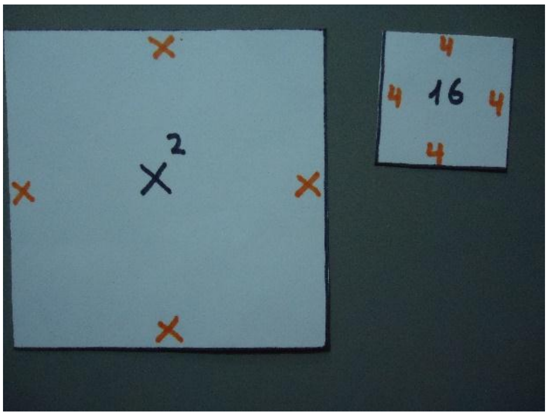


Figura 3.3.1.4.13. Fichas con diferentes áreas

3- Colocamos la ficha del sustraendo sobre el minuendo y lo marcamos con un lápiz el contorno.

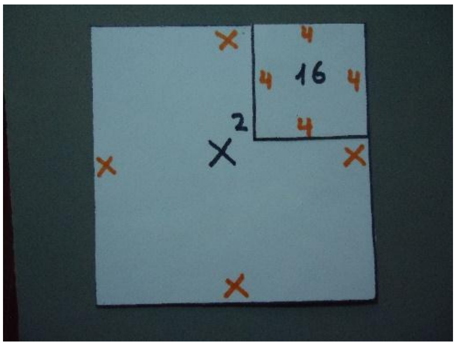


Figura 3.3.1.4.14. Demostración de una resta de áreas

4- Trazamos una recta como se muestra en la figura y procedemos a escribir los siguientes lados.

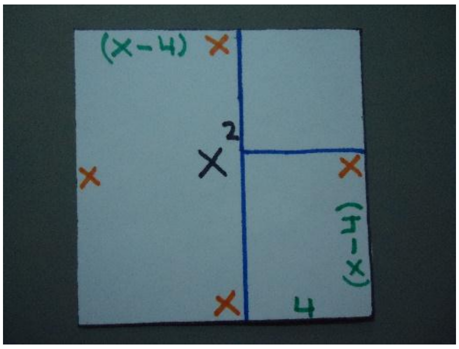


Figura 3.3.1.4.15. Cuadrado dividido en tres partes

5- Cortamos con las tijeras las tres piezas y ubicamos las dos piezas como se muestra en la figura.

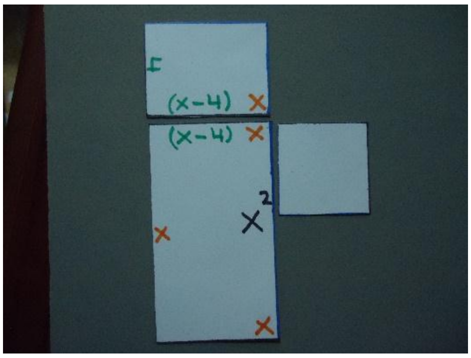


Figura 3.3.1.4.16. Piezas formando un área rectangular

6- El área de esta nueva figura es el resultado de la diferencia de cuadrados. Por lo tanto el producto de los lados (x+4) y el lado (x-4) es la respuesta.

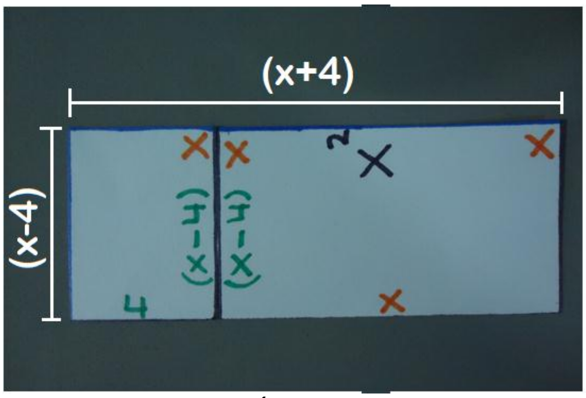


Figura 3.3.1.4.17. Área de lados (x+4) y (x-4)

CONSOLIDACION DEL APRENDIZAJE

Resolver los siguientes productos notables con piezas de madera y papel.

TABLA DE DATOS	
EXPRESIONES	**RESULTADO**
$(a+2)(a+3)$	
$(a+1)^2$	
$(a+2)(a+1)$	
$(a+2)(a-2)$	
a^2-49	
x^2-16	$(x+4)(x-4)$

Tabla 3.3.1.4.1. Tabla de datos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Factorización de polinomios

3.3.1.5 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

OBJETIVO: Demostrar mediante áreas la factorización de polinomios.

Teoría

La factorización de un polinomio consiste en descomponer ese polinomio en un producto de factores.

Factor común

Si el polinomio esta constituidos por términos que tienen un factor en común procedemos a escribir ese factor y entre paréntesis escribimos el cociente entre cada término y el factor común.

Ejemplo:

$$2ab + ac$$

El factor común es **a** por lo tanto

$$2\boldsymbol{a}b + \boldsymbol{a}c = \boldsymbol{a}(2b + c)$$

Hemos obtenido el producto de dos factores.

Es posible que entre todos los términos haya más de un factor que se repite, también es posible que los coeficientes sean múltiplos de un número en general, en estos dos casos debemos escribir como factor común todos los factores posibles que se repitan en el polinomio.

Ejemplo:

$$15ab^2 + 3a^2b - 9ab$$

Los factores que se repiten son **a** y **b** y todos los coeficientes son múltiplos de **3.** Por lo tanto el factor común es **3ab.**

$$15ab^2 + 3a^2b - 9ab = 3ab(5b + a - 3)$$

Trinomio cuadrado perfecto

Para poder factorizar este trinomio procedemos a extraer la raíz cuadrada del primer término y del último término, el segundo término es el doble producto de las dos raíces y cuyo signo se utiliza para separar a estas dos raíces. El resultado es un binomio y constituye la raíz cuadrada del trinomio, por esta razón tenemos que elevar al cuadrado.

Ejemplo:

$$a^2 - 10a + 25$$

La raíz del primer término es **a** y la raíz del tercer término es **5,** el signo del segundo término es (**-**), por lo tanto:

$$a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2 = (a - 5)(a - 5)$$

Diferencia de cuadrados perfectos

En productos notables se hablaba del producto de la suma por la diferencia de dos cantidades, en este caso la diferencia de cuadrados perfectos es el recíproco.

Para poder factorizar esta diferencia de cuadrados procedemos a extraer la raíz cuadrada del minuendo y del sustraendo, a continuación procedemos a multiplicar la suma por la diferencia de sus raíces. Debemos tener en cuenta que la diferencia es entre la raíz del minuendo por la raíz del sustraendo.

Ejemplo:

$$a^2 - b^2$$

Las raíces son **a** y **b**, luego

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Trinomio de la forma: $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

El trinomio está constituido por un primer término que tiene su literal elevado al cuadrado, el segundo término contiene un coeficiente y un literal igual al primero pero con exponente 1 y a su vez puede ser positivo o negativo, el tercer término es una constante ya sea positiva o negativa.

Para factorizar procedemos a realizar los siguientes pasos:

1.- Se descompone el trinomio en dos factores binomios que se separan entre paréntesis y cuyos primeros términos son la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

2.- El signo que separa al primer binomio es el signo del segundo término del trinomio y el signo que separa a los términos del segundo binomio es el producto de los signos del segundo con el tercer término del trinomio.

3.- Si los signos que contienen en medio los binomios son iguales se buscan dos números que al sumarlos nos den el segundo término del trinomio y su producto nos den el tercer término del trinomio.

4.- Si los signos que contienen en medio de los binomios son diferentes se buscan dos números que restados nos den el segundo término del trinomio y su producto nos den el tercer término del trinomio. El número mayor siempre va en el primer binomio y el menor en el segundo binomio.

Ejemplo 1:

$$a^2 + 11a + 28$$

Descomponemos en dos factores y colocamos la raíz del primer término del trinomio $a^2 = a$ como primer factor.

$$(a \qquad)(a \qquad)$$

Colocamos el signo del segundo término del trinomio como signo intermedio del primer binomio y el signo medio del segundo binomio en el producto del signo del segundo con el tercer término del trinomio.

$$(a + \quad)(a + \quad)$$

Como los signos son iguales buscamos dos números que sumados nos den **11** y multiplicados **28**, y esos son **7** y **4**.

$$(a + 7)(a + 4)$$

Ejemplo 2:

$$x^2 - 7x - 30$$

$$(x \qquad)(x \qquad)$$

El signo intermedio que colocaremos en el primer binomio es el signo del segundo término del trinomio (-), el signo intermedio del segundo binomio es la multiplicación del signo (-) con el signo del tercer término del trinomio (+).

$$(x \ - \quad)(x \ + \quad)$$

Como los signos son diferentes entonces buscamos dos números que restados nos de **7** y multiplicados **30**, estos son **10** y **3**. En esta ocasión ponemos el número mayor en el primer binomio y el menor en el segundo.

$$(x \ - \ 10)(x \ + \ 3)$$

Trinomio de la forma: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Este trinomio está constituido por un primer término que contiene un coeficiente diferente de 1, el segundo término y el tercero tienen las mismas características del caso anterior.

Para factorizar este trinomio se realizamos lo siguiente:

1.-Tomamos el coeficiente del primer término y multiplicamos por todo el trinomio, el objetivo es transformar este trinomio en un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$, para ello el primer término queda elevado al cuadrado $(\boldsymbol{ax})^2$ el segundo término $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ax})$ y el tercer término es el producto $\boldsymbol{ac}$

2.- Para resolver el trinomio procedemos de igual manera que el caso anterior. Al final toda la expresión se divide para el coeficiente que multiplicamos al principio, de esta manera no alteramos el trinomio original.

Ejemplo:

$$12x^2 - 13x - 35$$

El coeficiente del primer término es **12**, entonces;

$$12(12x^2 - 13x - 35)$$

Luego

$$(12x)^2 - 13(12x) - 420$$

$$(12x - \quad)(12x + \quad)$$

Buscamos dos números que multiplicados sea **420** y restados **13,** estos son **28** y **15.**

$$(12x - 28)(12x + 15)$$

Sacamos factor común y dividimos para **12**

$$\frac{\mathbf{4(3x - 7)3(4x + 5)}}{\mathbf{12}}$$

Simplificando,

$$\mathbf{(3x - 7)(4x + 5)}$$

GUÍA 5: Formando cuadriláteros con piezas de madera aplicados a factorización de polinomios

MATERIALES:

- ✓ Ficha cuadrada de lado **(x)**, color tomate.
- ✓ Ficha rectangular de lados **(x)** y **1**, color amarillo.
- ✓ Ficha cuadrada de lado **1**, color gris.

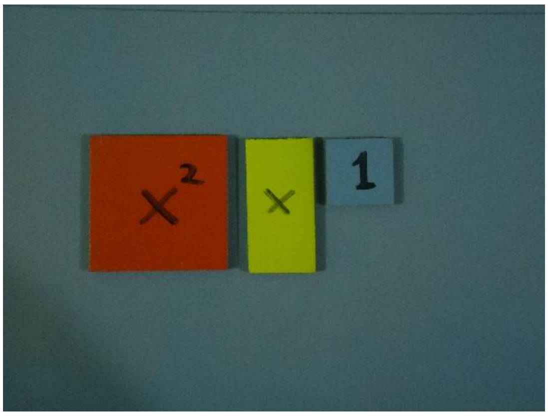


Figura 3.3.1.5.1. Piezas de diferentes áreas

- ✓ Tablero.

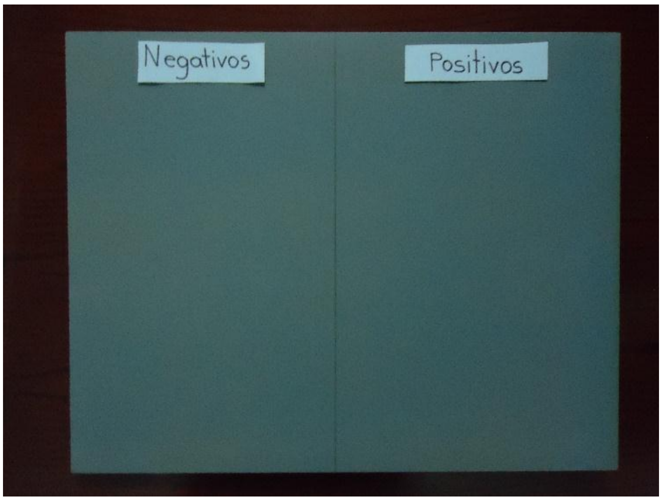


Figura 3.3.1.5.2. Tablero divido en dos partes

PROCEDIMIENTO:

Para poder obtener el resultado de una factorización de un polinomio lo importante es mediante las piezas poder formar un rectángulo, de tal manera que el producto de sus lados nos dé el resultado esperado.

1- Nos ubicamos en la tabla de datos y seleccionamos el primer ejercicio que es:

$$x^2 + 2x + 1$$

2- Seleccionamos según la expresión el número de fichas que vamos a utilizar. En este caso tenemos $x^2 + 2x + 1$ así que seleccionamos 1 ficha de x^2 , 2 fichas de x y una ficha de 1

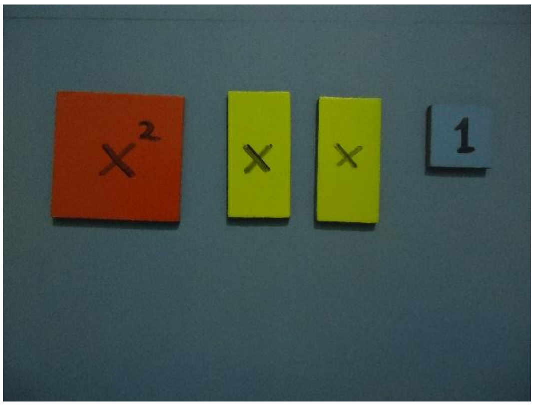


Figura 3.3.1.5.3. Piezas seleccionadas

3- Ubicamos las fichas en la pizarra, si tenemos expresiones negativas las ponemos en la parte de los negativos y las expresiones positivas en el lado de los positivos. En este caso existe solo expresiones positivas, así que ubicamos en la parte de los positivos. Por lo tanto colocamos las fichas de tal manera que se forme un cuadrado, las fichas se colocarán según sus lados, las equis con las equis y los unos con los unos.

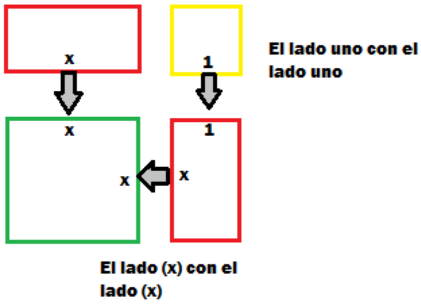


Figura 3.3.1.5.4. Proceso para ubicar las piezas

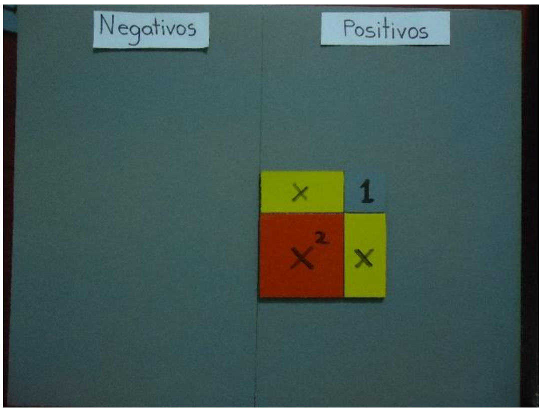


Figura 3.3.1.5.5. Figura cuadrada de lados (x+1)

4- Finalmente el resultado será el producto de los lados del cuadrado obtenido

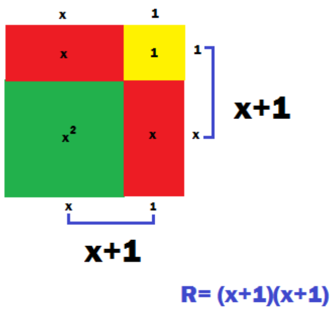


Figura 3.3.1.5.6. Cuadrado de lados (x+1)

Ejemplo 2: Factorizar $2x^2 - 3x - 2$

1- Para este ejemplo vamos a seleccionar 2 fichas con área x^2, 3 fichas con área x y 2 fichas de área 1.

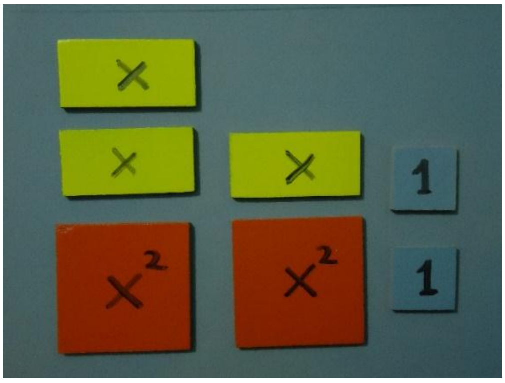


Figura 3.3.1.5.7. Piezas de diferentes áreas

2- Colocamos las fichas que son positivas en el lado de los positivos y las negativas en el lado de los negativos. Es importante recordar que las piezas se coloquen coincidiendo sus lados.

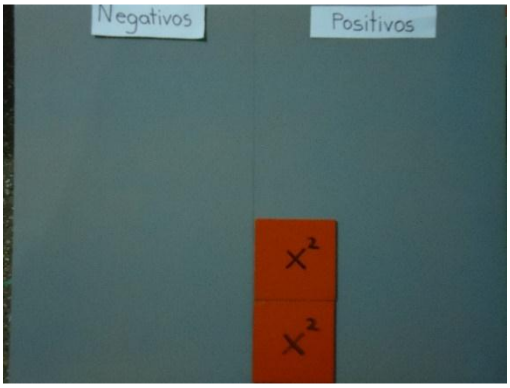


Figura 3.3.1.5.8. Piezas ubicadas en la parte positiva

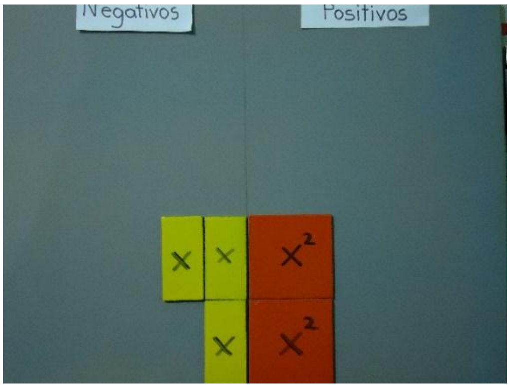


Figura 3.3.1.5.9. Piezas ubicadas en la parte positiva y negativa

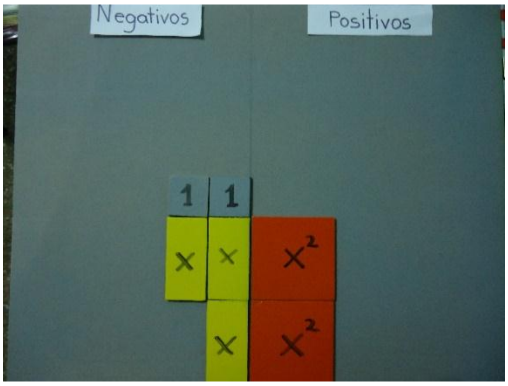


Figura 3.3.1.5.10. Piezas ubicadas en la parte positiva y negativa

3- Recordemos que para obtener el resultado tenemos que formar una figura cuadrada o rectangular, por lo tanto vamos a completar la figura con fichas que puedan llenar los espacios.

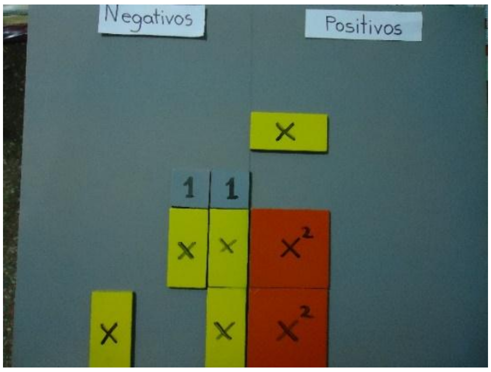


Figura 3.3.1.5.11. Piezas completando una figura rectangular

Si observamos la figura (Figura 3.3.1.5.11) las fichas que completan el rectángulo son las que tienen área x.

Por lo tanto ubicamos las piezas para completar el rectángulo.

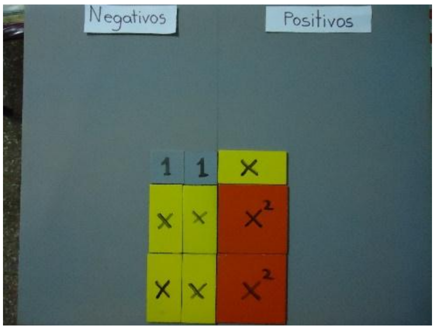


Figura 3.3.1.5.12. Piezas formando una figura rectangular

Los lados del rectángulo son:

Figura 3.3.1.5.13. Lados del rectángulo formado

El factor $(x-2)$ significa que el lado **x** es positivo, puesto que está en la parte positiva, y **-2** está en la parte negativa, es por ello que el lado $(x-2)$ queda expresado de esa manera.

Finalmente expresamos el resultado como el área del rectángulo

$$(2x+1)(x-2)$$

Recordar: Los casos que se pueda trabajar con las piezas son: trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma x^2+bx+c, trinomio de la forma ax^2+bx+c. Para la diferencia de cuadrados nos basaremos en piezas de papel que recortaremos (Figura 3.3.1.5.14) y el procedimiento es el mismo que la guía 4 ejemplo 2.

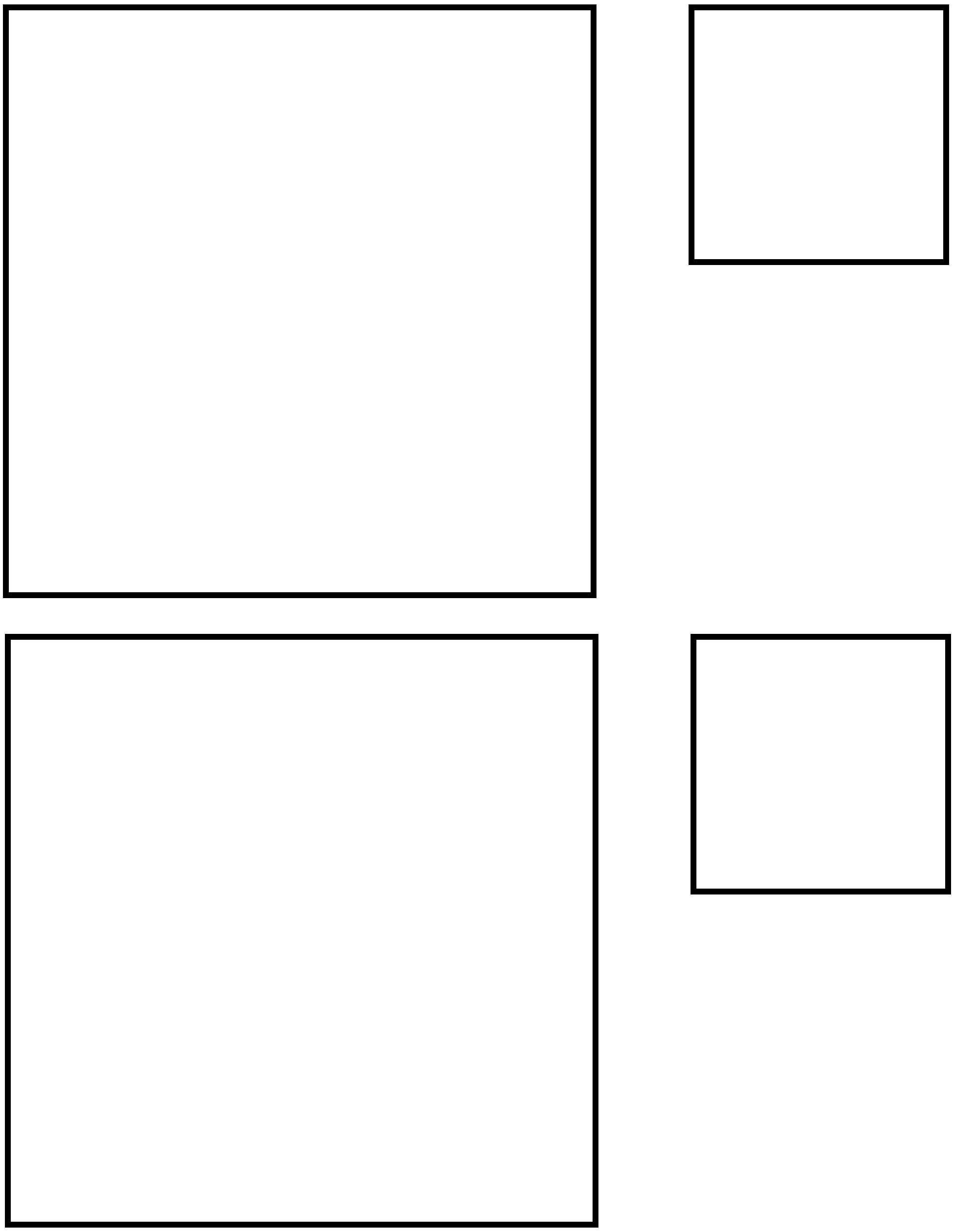


Figura 3.3.1.5.14. Fichas para recortar.

CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE

Factorizar los siguientes expresiones utilizando las piezas de madera y el papel.

TABLA DE DATOS	
EXPRESIONES	**RESULTADO**
$x^2 + 2x + 1$	$(x + 1)(x + 1)$
$2x^2 - 3x - 2$	$(2x + 2)(x - 2)$
$x^2 - 2x - 3$	
$2x^2 - 3x - 9$	
$a^2 - 25$	
$x^2 - 36$	

Tabla 3.3.1.5.1. Tabla de datos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Determinación de máximos y mínimos

3.3.1.6 DETERMINACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE POLINOMIOS

OBJETIVO: Identificar en una gráfica los puntos máximos y mínimos de una función de polinomios.

Teoría

Cuando hablamos de determinar un punto máximo y un punto mínimo de un polinomio nos referimos a que en la gráfica de dicho polinomio se encuentra un punto en la que el valor de **y** es muy alto y otro punto en el que el valor de **y** es pequeño.

Para conocer dichos valores tendríamos que basarnos en el cálculo diferencia (segunda derivada). Sin embargo estaríamos adelantándonos a temas que se verán después, por lo que en esta ocasión nuestro camino para encontrar estos valores sería graficar la función de la forma tradicional.

En la actualidad existe una serie de software matemático que ayuda a graficar funciones de una forma precisa y en menor tiempo, agilizando la forma de determinar los puntos.

GUÍA 6: Identificando máximos y mínimos de polinomios

MATERIALES:

- ✓ Hoja con funciones.

PROCEDIMIENTO:

La hoja cuenta con cuatro graficas de funciones polinomiales, en la que contienen sus respectivos puntos máximos y mínimos. El estudiante deberá identificar dichos puntos y marcarlos.

Los ejes de los planos cartesianos están numerados, pero estos puntos máximos y mínimos no contienen una coordenada específica, por ejemplo (2,3) por lo que el estudiante deberá tratar de aproximar su punto.

En la siguiente hoja que contiene funciones polinomiales, determinar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos.

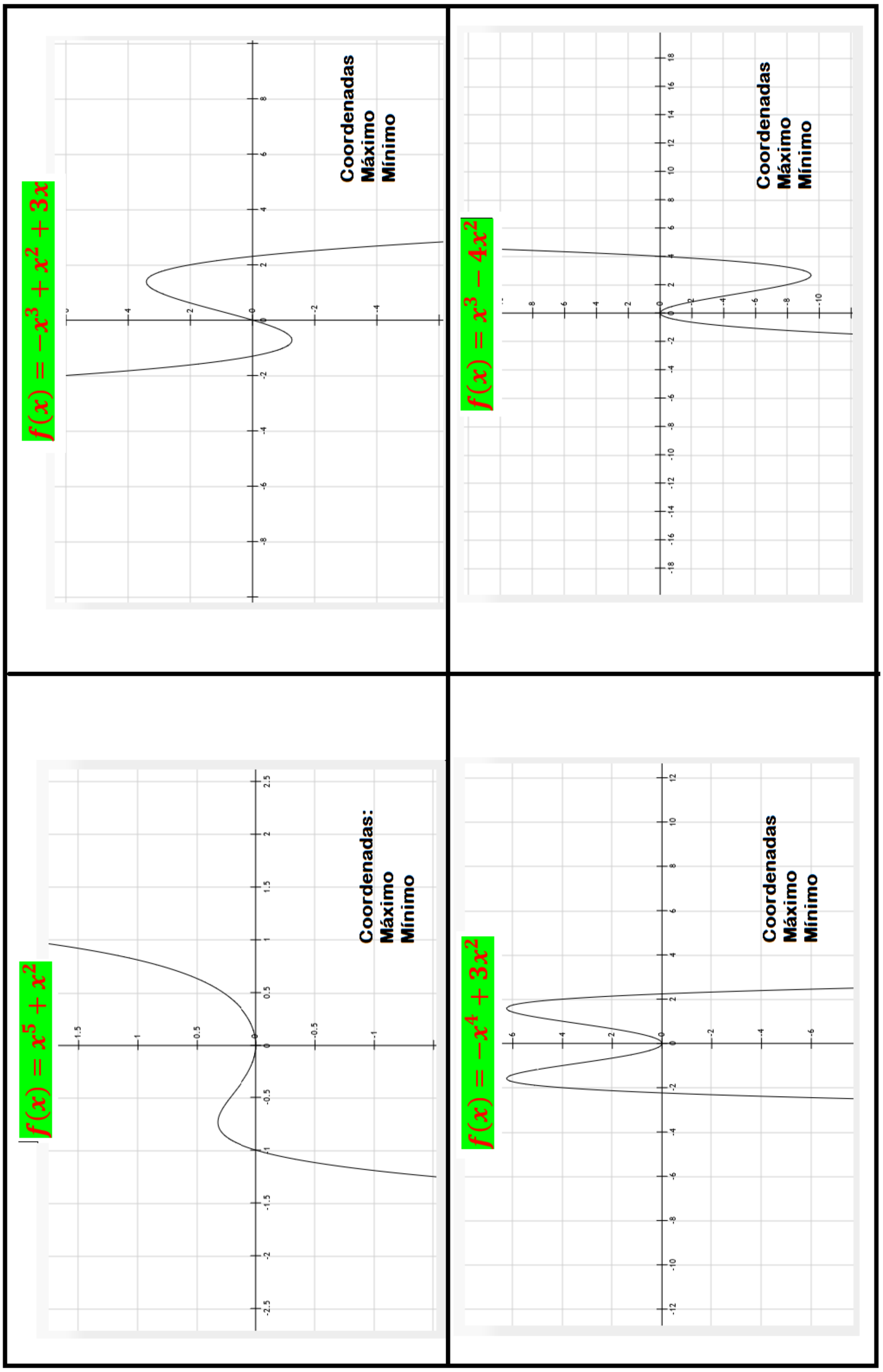
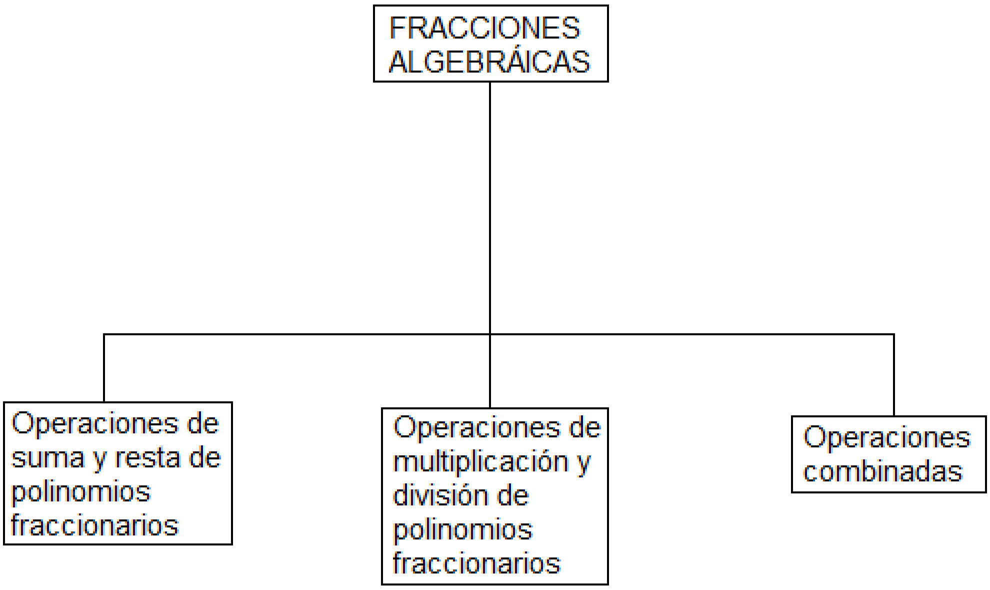


Figura 3.3.1.6.1 Hoja de actividades

3.3.2 ESTRUCTURA DE LOS SUBTEMAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS



UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Operaciones de suma y resta con polinomios fraccionarios

3.3.2.1 OPERACIONES DE SUMA Y RESTA CON POLINOMIOS FRACCIONARIOS

OBJETIVO: Aplicar correctamente los algoritmos para desarrollar operaciones de suma y resta con polinomios fraccionarios.

Teoría

Cuando hablamos de operaciones de suma y resta de fracciones debemos encontrar el mínimo común divisor entre todos los denominadores, luego dividir este m.c.m para cada uno de los denominadores, multiplicar por su numerador y realizar las respectivas operaciones de suma y resta para encontrar la respuesta. En algebra el procedimiento es el mismo, sin embargo es necesario comprender que en este punto no solo hay números sino expresiones que en muchos casos es importante factorizar.

La regla general para sumar y restar fracciones es

1.- Simplificar las expresiones fraccionarias y factorizamos los denominadores de ser posible

2.- Encontramos el m.c.m de los denominadores que son los términos que se repiten en cada uno de ellos.

3.- Procedemos a realizar las mismas operaciones como si fuese una suma y resta de números fraccionarios.

4.- Finalmente reducimos términos semejantes y simplificamos de ser posible.

Ejemplo:

$$\frac{x}{xy+y^2}+\frac{1}{y}-\frac{y}{xy+x^2}$$

Factorizando denominadores tenemos

$$\frac{x}{y(x+y)}+\frac{1}{y}-\frac{y}{x(y+x)}$$

El m.c.m es $\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$

$$\frac{x^2+x(x+y)-y^2}{\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}$$

$$\frac{x^2+x^2+xy-y^2}{\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{2x^2+xy-y^2}{\boldsymbol{xy}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}$$

GUÍA 7: Rompecabezas de polinomios fraccionarios

MATERIALES:

- ✓ Lápices
- ✓ Tijeras
- ✓ Goma
- ✓ Hoja de rompecabezas (final de la guía)
- ✓ Ficha de respuestas (final de la guía)

PROCEDIMIENTO:

1- Desarrollar en el cuaderno cada ejercicio que se encuentra en los casilleros de la hoja 1 empezando de la parte superior izquierda, el resto seguiría en forma horizontal. Ejemplo: La primera operación con polinomios fraccionarios es

$$\frac{3a-2b}{4}-\frac{5a+2}{3}$$

$\frac{3a-2b}{4}-\frac{5a+2}{3}$	$\frac{3a+2}{3}+\frac{3a-3}{5}$

Figura 3.3.2.1.1. Hoja de ejercicios con polinomios fraccionarios

El resultado obtenido es

$$\frac{-11a-6b-8}{12}$$

2- En la ficha de respuestas buscamos el resultado obtenido y verificamos si está correcto, cabe mencionar que cada respuesta contiene un literal en mayúsculas, este literal nos sirve para buscar las piezas que se encuentran en la hoja 2 puesto que cada figura que se va a recortar contiene un literal en la parte inferior izquierda.

J	$\frac{-11a-6b-8}{12}$

Figura 3.3.2.1.2. Parte de una ficha de resultados

La respuesta se encuentra en el literal **J**

3- Con las tijeras recortar la figura que contiene el literal.

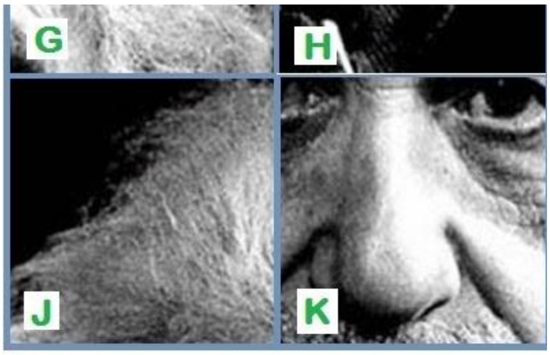


Figura 3.3.2.1.3. Piezas de un de rompecabezas

4- Se procede a pegar la figura sobre el ejercicio que se ha resuelto.

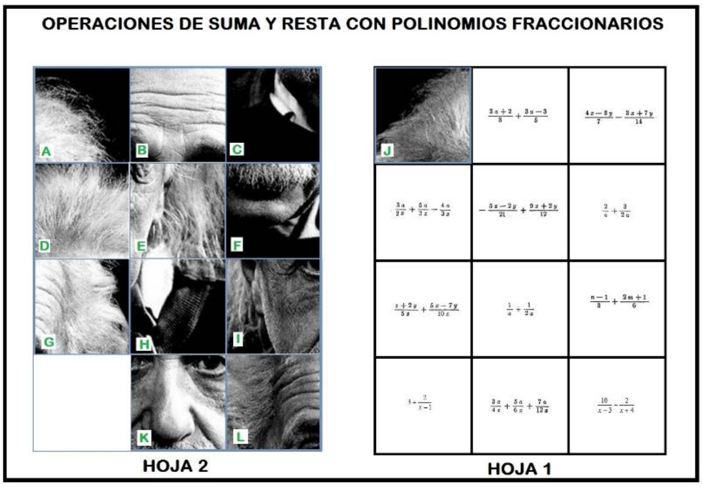


Figura 3.3.2.1.4. Pieza pegada sobre su respectivo ejercicio

5- Realizar el mismo procedimiento con el resto de operaciones y se busca la respuesta, se recorta y se pega sobre su respectivo ejercicio.
6- Finalmente se descubre la imagen que se forma al pegar todas las piezas.

La imagen es:………………………………………………………………

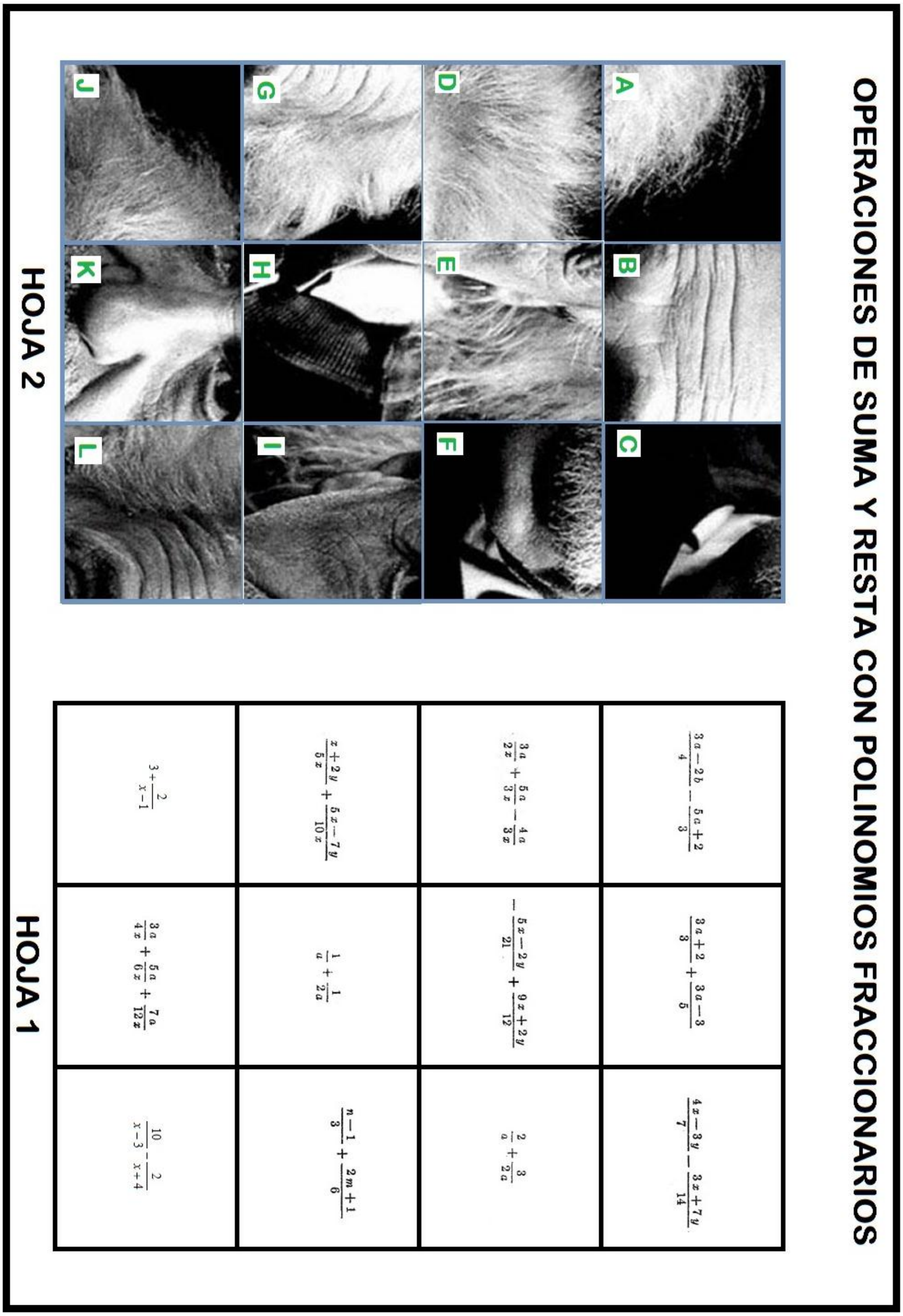


Figura 3.3.2.1.5. Hoja de rompecabezas

FICHA DE RESULTADOS

A	$\frac{5x-13y}{14}$	**G**	$\frac{7}{2a}$
B	$\frac{43x+64}{84}$	**H**	$\frac{8x+46}{(x-3)(x+4)}$
C	$\frac{3x-1}{x-1}$	**I**	$\frac{7x-3y}{10x}$
D	$\frac{6a+1}{15}$	**J**	$\frac{-11a-6b-8}{12}$
E	$\frac{2m+2n+1}{6}$	**K**	$\frac{3}{2a}$
F	$\frac{26a}{12x}$	**L**	$\frac{11a}{6x}$

Figura 3.3.2.1.6, Ficha de resultados

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Operaciones de multiplicación y división de polinomios fraccionarios

3.3.2.2 OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE POLINOMIOS FRACCIONARIOS

OBJETIVO: Aplicar correctamente los algoritmos para desarrollar operaciones de multiplicación y división con polinomios fraccionarios.

Teoría

Multiplicación de polinomios fraccionarios

Regla para multiplicar polinomios fraccionarios.

1.- Factorizar los términos de cada polinomio de ser posible.

2.-Simplificamos los factores comunes entre el numerador y denominador.

3.- Multiplicamos entre si las expresiones que quedan tanto en el numerador como el denominador.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+9x+18}{x-5}*\frac{5x-25}{5x+15}$$

Factorizamos todas las expresiones posibles.

$$\frac{(x+6)(x+3)}{x-5}*\frac{5(x-5)}{5(x+3)}$$

Realizamos el producto, numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.

$$\frac{(x+6)(x+3)5(x-5)}{(x-5)5(x+3)}$$

Simplificamos los términos semejantes,

$$x+6$$

División de polinomios fraccionarios

Regla para dividir polinomios fraccionarios:

1- Factorizamos los términos de dividendo y divisor de ser posible,
2- Dividimos como si fuesen números fraccionarios, es decir, invertimos la segunda expresión para formar una multiplicación.
3- Finalmente multiplicamos numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.
4- De ser posible simplificamos términos semejantes.

Ejemplo:

$$(x+\frac{1}{x+2}) \div (1+\frac{3}{x^2-4})$$

Factorizamos las expresiones que sean posibles

$$\frac{x(x+2)+1}{x+2} \div \frac{(x^2-4)+3}{(x+2)(x-2)}$$

Invertimos la segunda expresión y la transformamos en una multiplicación.

$$\frac{x^2+2x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x^2-1}$$

Multiplicamos numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.

$$\frac{(x+1)(x+1)}{x+2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$

Simplificando términos semejantes

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)}$$

GUÍA 8: Rompecabezas con polinomios fraccionarios. Multiplicación y división

MATERIALES:

- ✓ Lápiz
- ✓ Tijeras
- ✓ Goma
- ✓ Hoja de rompecabezas (final de la guía)
- ✓ Ficha de resultados (final de la guía)

PROCEDIMIENTO:

1- Desarrollar en el cuaderno cada ejercicio que se encuentra en los casilleros de la hoja 1 empezando de la parte superior izquierda, el resto seguiría en forma horizontal.

Ejemplo: La primera operación con polinomios fraccionarios es

$$\frac{5x+7}{(x+1)(2x+3)}$$

$\frac{5x+7}{(x+1)(2x+3)}$	$\frac{-6x+7}{(3x-1)(2x+1)}$

Figura 3.3.2.2.1. Hoja de ejercicios con polinomios fraccionarios

El resultado obtenido es,

$$\frac{5x+7}{2x^2+x+3}$$

2- En la ficha de respuestas buscar el resultado obtenido y verificar si está correcto, cabe mencionar que cada respuesta contiene un literal en mayúsculas, este literal nos sirve para buscar las piezas que se encuentran en la hoja 2 puesto que cada figura que se va a recortar contiene un literal en la parte inferior izquierda.

E	$\frac{5x+7}{2x^2+x+3}$

Figura 3.3.2.2.2. Parte de una ficha de resultados

La respuesta se encuentra en el literal **E**

3- Con las tijeras recortar la figura que contiene la respuesta

Figura 3.3.2.2.3. Pieza de un de rompecabezas

4- Se procede a pegar la figura sobre el ejercicio que se ha resuelto.

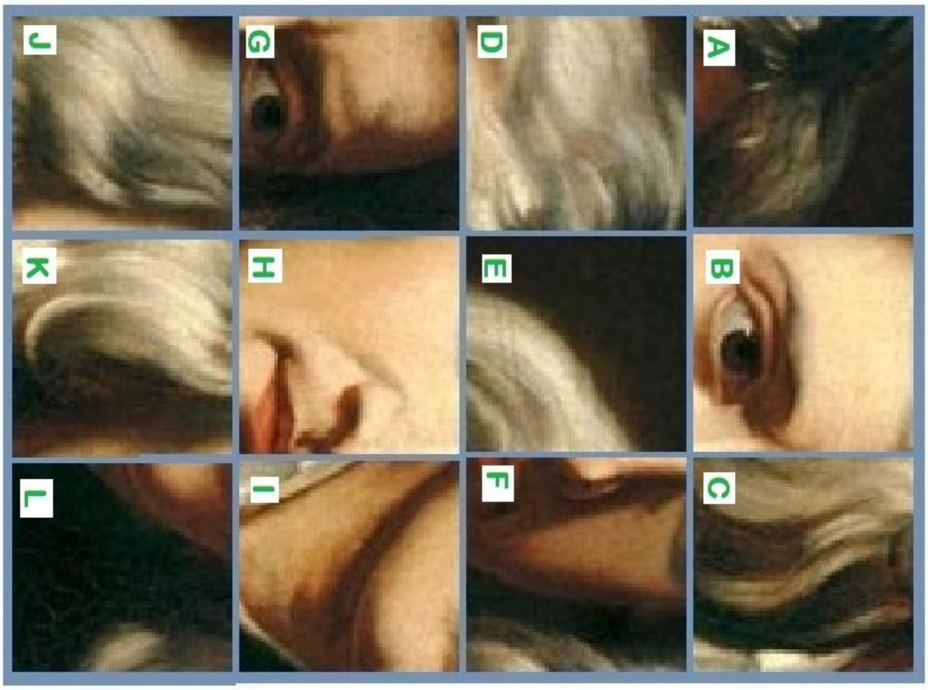
Figura 3.3.2.2.4. Pieza pegada sobre su respectivo ejercicio

5- Realizar el mismo procedimiento con el resto de operaciones, buscar la respuesta, recortarla y pegarla sobre su respectivo ejercicios

6- Finalmente describimos la imagen que se forma al pegar todas las piezas.

La imagen es:………………………………………………………………

OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON POLINOMIOS FRACCIONARIOS



HOJA 2

$\frac{5x+7}{(x+1)(2x+3)}$	$\frac{6x^2+x-2}{-3x^2+x+2}\times\frac{1-x}{x+2}$	$\frac{6x^2+x-1}{3x^2+2x-1}\div\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$
$\frac{x^2+x-6}{x+4}\div\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-4}$	$\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\frac{x-3}{x^2-x-2}$	$\frac{x^2-x-2}{x-3}\times\frac{x^2-2x-3}{x-2}$
$\frac{2x^2-5x-3}{2x+1}\div\frac{x-3}{2x^2+5x+2}$	$\frac{4x^2-3x-1}{20x^2+7x-6}\times\frac{5x-2}{4x+1}$	$\frac{8x^2-15x-2}{5x-3}\div\frac{8x+1}{5x^2+7x-6}$
$\frac{7x^2-11x-6}{x-2}\times\frac{1}{7x^2-4x-3}$	$\frac{9x^2-30x+9}{x^2-2x-3}\div\frac{3(3x-1)}{x^2-2x-3}$	$\frac{4x^2-13x+3}{5x+2}\times\frac{5x^2-3x-2}{4x-1}$

HOJA 1

Figura 3.3.2.2.5. Hoja de rompecabezas

FICHA DE RESULTADOS

A	$\frac{x-1}{x+1}$	G	$(x+1)^2$
B	$\frac{x+2}{(x+1)^2}$	H	$\frac{x-1}{4x+3}$
C	$\frac{1}{x-1}$	I	$x-3$
D	$\frac{2x-1}{x+2}$	J	$x-1$
E	$\frac{5x+7}{2x^2+x+3}$	K	$(2x+1)(x+2)$
F	x^2-4	L	$(x-3)(x-1)$

Figura 3.3.2.2.6. Ficha de resultados

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Operaciones combinadas

3.3.2.3 OPERACIONES COMBINADAS

OBJETIVO: Resolver diferentes operaciones combinadas con polinomios fraccionarios.

Teoría

Para desarrollar este tipo de ejercicios empezamos por resolver los términos que están multiplicando y dividiendo. En seguida los términos que están sumando y restando. Finalmente simplificamos de ser posible.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}\right).\left(\frac{a^2x^2-16a^2}{2x^2+7x+3}\right).\left(\frac{2}{a^2x}+\frac{1}{a^2x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x^2-9}{x^2-x-12}.\frac{x^2+3x}{x-3}\right).\left(\frac{a^2(x^2-16)}{2x^2+7x+3}\right).\left(\frac{2x+1}{a^2x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)(x+3)}.\frac{x(x+3)}{x-3}\right).\left(\frac{a^2(x+4)(x-4)}{(x+3)(2x+1)}\right).\left(\frac{2x+1}{a^2x^2}\right)$$

Simplificando

$$\frac{x+4}{x}$$

GUÍA 9: Rompecabezas de polinomios con operaciones combinadas

MATERIALES:

- ✓ Lápiz
- ✓ Tijeras
- ✓ Goma
- ✓ Hoja de rompecabezas (final de la guía)
- ✓ Ficha de resultados (final de la guía)

PROCEDIMIENTO:

1- Desarrollar en el cuaderno cada ejercicio que se encuentra en los casilleros de la hoja 1 empezando con la casilla que se encuentra en la parte superior izquierda. Ejemplo: La expresión es $\left(\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^4}{1-x^4}\right)\left(1-x+\frac{1+x^3}{x^2}\right)$

$\left(\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^4}{1-x^4}\right)\left(1-x+\frac{1+x^3}{x^2}\right)$	$\frac{8x^2+19x+12}{(x+1)^2(x^2+3x-3)}$

Figura 3.3.2.3.1. Hoja de ejercicios con polinomios fraccionarios

El resultado es $\frac{1}{(1-x^2)}$

2- Buscar el resultado de dicha operación en la ficha que consta todas las respuestas de las operaciones que contiene la primera hoja, verificar si está correcto y ubicar el literal respectivo en la hoja 2.

A	$\frac{1}{1-x^2}$

Figura 3.3.2.3.2. Parte de una ficha de resultados

El literal **A** tiene el resultado, así que buscamos la pieza en la hoja 2.

3- Con las tijeras recortar la figura que contiene la respuesta

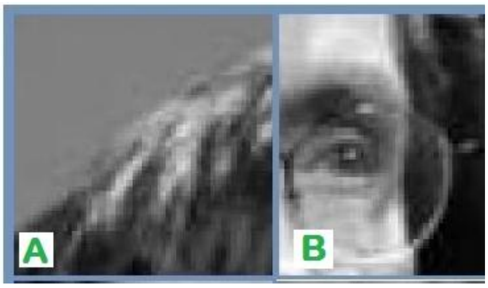


Figura 3.3.2.3.3. Ficha de rompecabezas

4- Se procede a pegar nuestra figura sobre el ejercicio que se ha resuelto.

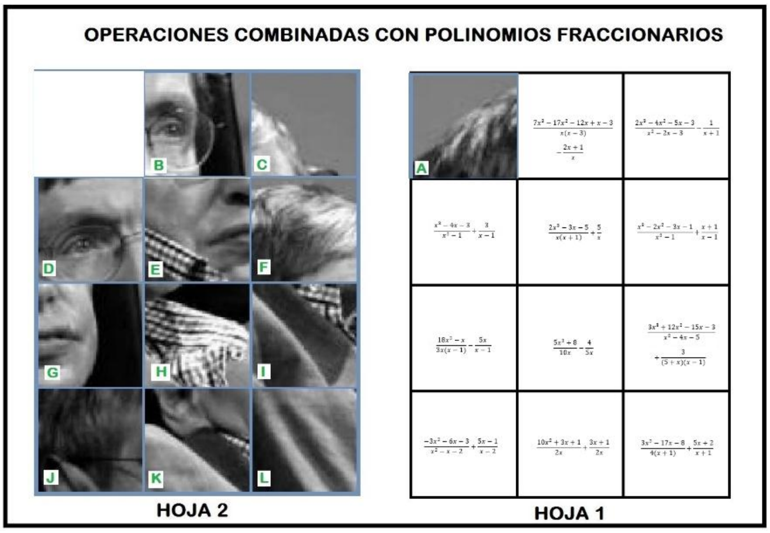


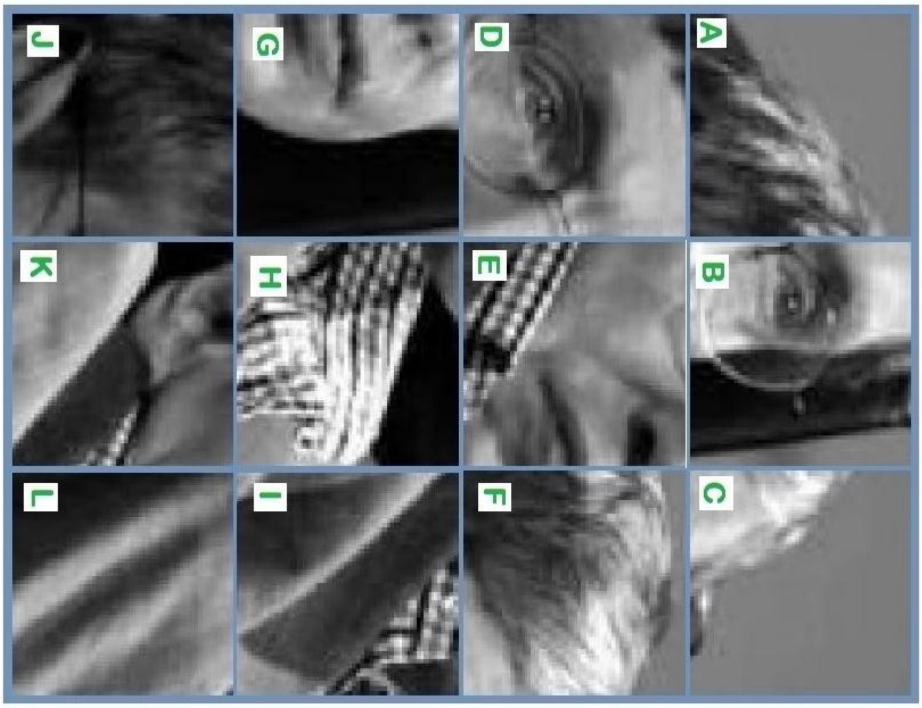
Figura 3.3.2.3.4. Recorte de una ficha de rompecabezas

5- Realizar el mismo procedimiento con el resto de operaciones, buscar la respuesta, recortarla y pegarla sobre su respectivo ejercicio.

6- Finalmente describimos la imagen que se forma al pegar todas las piezas.

La imagen es:……………………………………………………….

OPERACIONES COMBINADAS CON POLINOMIOS FRACCIONARIOS



HOJA 2

$\left(\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^4}{1-x^4}\right)\left(1-x+\frac{1+x^3}{x^2}\right)$	$\frac{7x^3-17x^2-12x+x-3}{x(x-3)}-\frac{2x+1}{x}$	$\frac{2x^3-4x^2-5x-3}{x^2-2x-3}-\frac{1}{x+1}$
$\frac{x^3-4x-3}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}$	$\frac{2x^3-3x-5}{x(x+1)}+\frac{5}{x}$	$\frac{x^3-2x^2-3x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x-1}$
$\frac{18x^2-x}{3x(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$	$\frac{5x^3+8}{10x}-\frac{4}{5x}$	$\frac{3x^3+12x^2-15x-3}{x^2-4x-5}+\frac{3}{(5+x)(x-1)}$
$\frac{-3x^2-6x-3}{x^2-x-2}+\frac{5x-1}{x-2}$	$\frac{10x^2+3x+1}{2x}+\frac{3x+1}{2x}$	$\frac{3x^2-17x-8}{4(x+1)}+\frac{5x+2}{x+1}$

HOJA 1

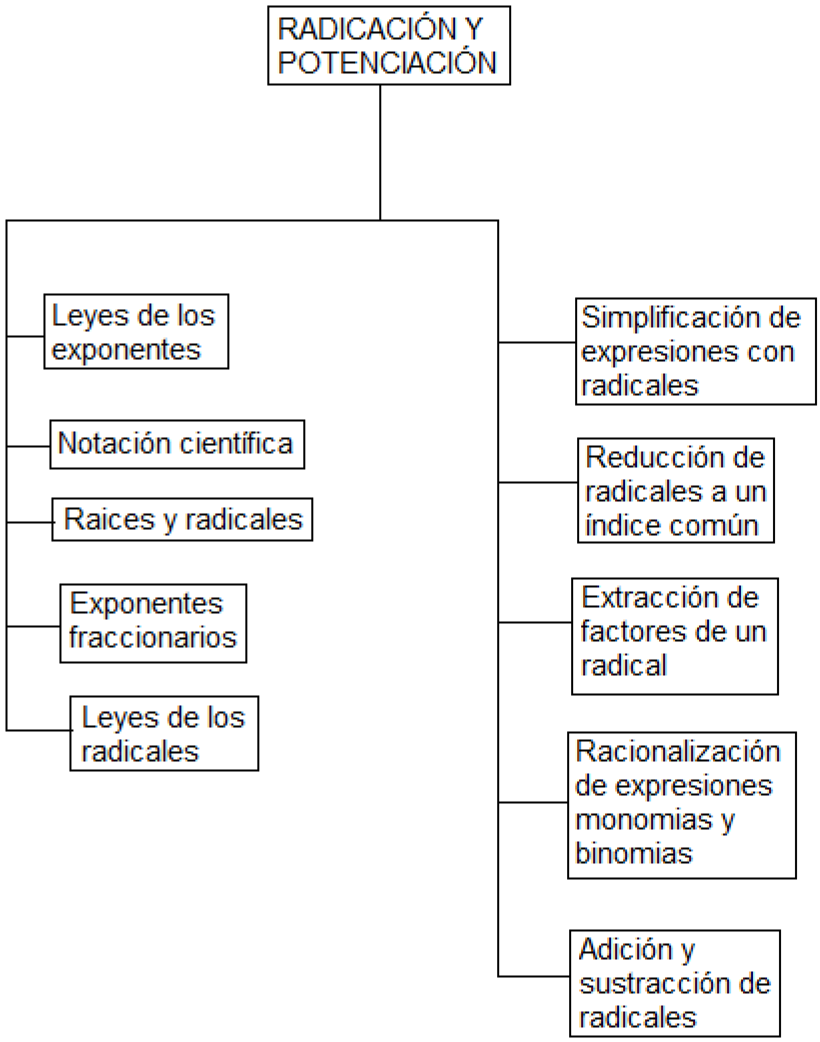
Figura 3.3.2.3.5. Hoja de rompecabezas

FICHA DE RESULTADOS

A	$\frac{1}{1-x^2}$	G	$3x$
B	$x-1$	H	$\frac{3x}{4}$
C	$2x$	I	$5x+3$
D	$2x$	J	x
E	$\frac{x^2}{2}$	K	$\frac{x+1}{x-1}$
F	$7x+2$	L	2

Figura 3.3.2.3.6. Ficha de resultados

3.3.3 ESTRUCTURA DE LOS SUBTEMAS DE RADICACIÓN Y POTENCIACIÓN



UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Leyes de los exponentes

3.3.3.1 LEYES DE LOS EXPONENTES

OBJETIVO: Identificar cada una de las leyes de los exponentes.

Teoría

Un exponente es un elemento de una potencia que indica las veces que se debe multiplicar la base por sí misma. Es importante conocer ciertas leyes que intervienen cuando se realizan operaciones con potencias. Dichas leyes son:

Producto de dos potencias de igual base y diferente exponente es igual a la misma base y la suma de sus exponentes.

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

El cociente de dos potencias de igual base y diferente exponente es igual a la misma base y la resta de sus exponentes.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Potencia de una potencia es igual a la misma base y al producto de los exponentes

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

Exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo denominador es el índice del radical y el numerador es el exponente del subradical.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Recíprocamente la raíz de una potencia $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Exponente cero: un exponente cero se da cuando dividimos dos potencias de igual base e igual exponente.

$$x^m \div x^m = x^{m-m} = x^0$$

Potencia con exponente negativo es igual a una cantidad fraccionaria que tiene su numerador equivalente a 1 y denominador la potencia con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

GUÍA 10: Leyes de los exponentes

MATERIALES:

- ✓ Piezas que contienen algunas leyes de los exponentes
- ✓ Hoja de rompecabezas
- ✓ Tijeras y goma

PROCEDIMIENTO:

1- Se entrega al estudiante dos hojas, la primera contiene las leyes de los exponentes y la otra es una hoja con casillas. El objetivo recortar las piezas de la hoja que contiene las leyes y hacer coincidir en la segunda hoja, de tal manera que al terminar el armado queden expuestas cada una de las leyes.

2- Anotamos cada ley en el cuadro de datos (Tabla 3.3.3.1.1) y ubicamos dos ejemplos de cada una.

CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE

Escribir las leyes de los exponentes que se formó en el rompecabezas y dos ejemplos de cada una. Compara los ejemplos con tus compañeros.

TABLA DE DATOS		
Leyes de los exponentes	**Ejemplo**	**Ejemplo 1**

Tabla de datos 3.3.3.1.1

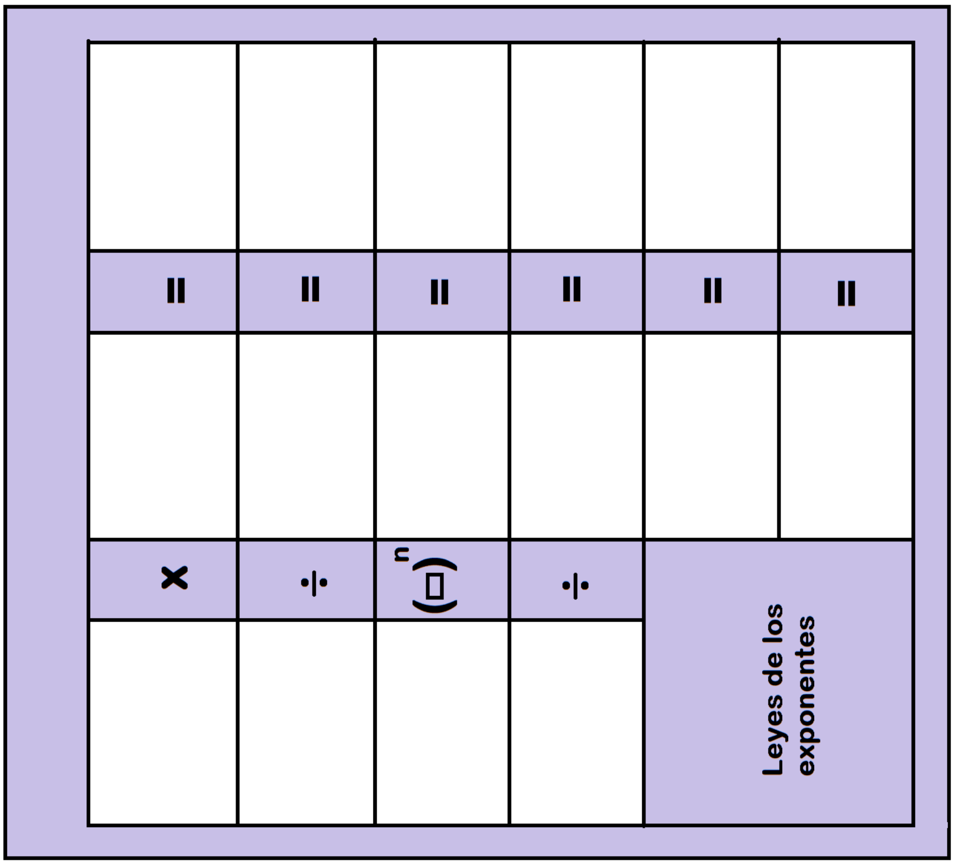


Figura 3.3.3.1.1. Tabla para completar leyes de los exponentes

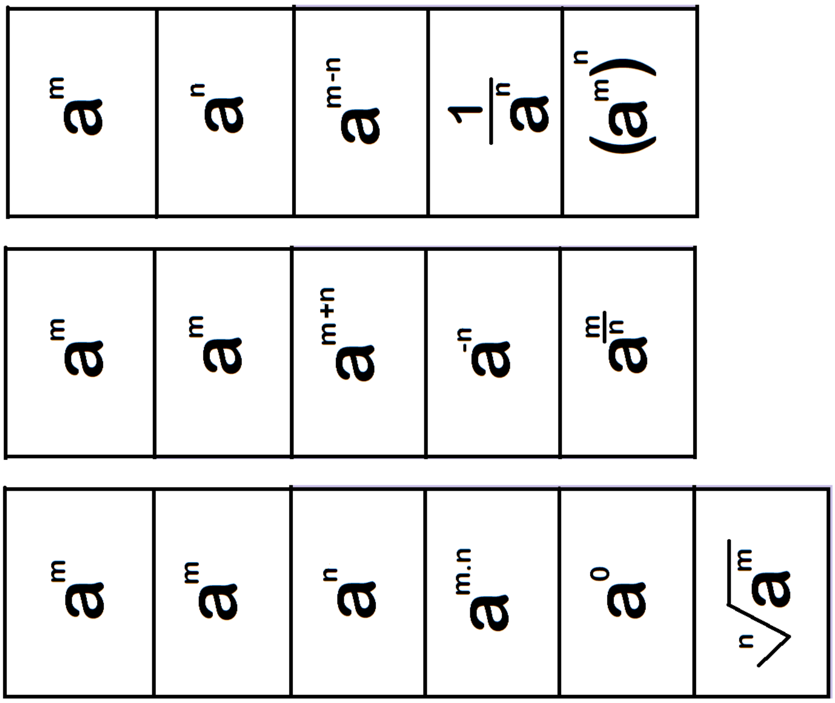


Figura 3.3.3.1.2. Figuras para recortar

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Notación científica

3.3.3.2 NOTACIÓN CIENTÍFICA

OBJETIVO: Analizar cantidades numéricas y ubicar la coma para expresar un número grande o pequeño en notación científica.

Teoría

La notación científica es una manera de escribir números que son demasiado grandes o por el contrario demasiado pequeñas. También es conocido como Notación Exponencial. Cabe decir que la notación científica se lo puede utilizar tranquilamente en la suma, resta, multiplicación y división.

Ejemplo 1:

Tenemos la siguiente cantidad: $248\,000\,000\,000\ \mathrm{cm}$.

Si lo ponemos en forma de notación científica tenemos: $2{,}48x10^{11}cm$.

Ahora vamos a explicar cómo se lo hace:

1. Contamos los espacios que tiene dicho número de derecha a izquierda hasta llegar al último número.
2. Antes de llegar al último número, separamos la cantidad con una coma dejando dos cifras como compañía. En el ejemplo anterior serían los números 4 y 8.
3. Finalmente multiplicamos la cantidad 2,48 que es la base, por diez y en este caso sería el exponente once, porque hay once espacios que separan a los números.

Ejemplo 2:

Tenemos la siguiente cantidad: $0{,}000\ 098\ 784\ \mathrm{cm}$.

En notación científica queda: $9{,}87x10^{-5}cm$.

Se lo realiza de la siguiente manera:

1. Ahora, desde la izquierda hasta la derecha vamos contando cuantos espacios dan y llegamos al primer número distinto de cero. En este caso sería el número 9.
2. Después se cogen los dos números siguientes a dicho número y lo multiplicamos por diez como base constante. En este caso serían los números 8 y 7.
3. Finalmente, la potencia o el exponente será negativo puesto que contamos de izquierda a derecha.

GUÍA 11: Ábaco de notación científica

MATERIALES:

- ✓ Un ábaco especialmente diseñado para expresar números en notación científica de hasta 16 cifras, y la expresión de hasta 3 cifras.

Figura 3.3.3.2.1. Ábaco de notación científica

PROCEDIMIENTO:

1- En el ábaco formamos el número que va a ser expresado en notación científica mediante el movimiento circular de cada pieza. Por ejemplo el número 36 500 000 000 000, para ello debemos ubicar el número de derecha a izquierda empezando desde el primer cero hasta terminar en el tres.

Figura 3.3.3.2.2. Cantidad formada en el ábaco

El número debe estar bien apegado al lado derecho como se muestra en la figura.

2- Si es un número de gran cantidad utilizamos el móvil de la parte derecha, procedemos a ubicar en punto blanco donde deseamos poner la coma.

Figura 3.3.2.3. Cantidad de cuatro cifras encerrada en un rectángulo

En este caso la coma la he ubicado entre el 3 y el 6, el rectángulo negro me indica el número con 4 cifras con un entero y tres decimales, es decir 3,650.

Figura 3.3.3.2.4.Rectángulo negro que marca una cantidad

3- Observamos la regla de la parte superior y nos damos cuenta que el rectángulo negro encierra la expresión **13,** a su vez el móvil contiene la letra **E**.

Figura 3.3.3.2.5. Elementos que contiene el Ábaco de notación científica

4- Escribimos el número que está dentro el rectángulo, luego la letra **E** que se encuentra en el móvil y finalmente el número que se encuentra en la regleta superior derecha. De esta manera el número 36 500 000 000 000 queda expresado en notación científica como 3,650E13.

5- Para expresar un número pequeño en notación científica procedemos a ubicar el número con todas las cifras empezando desde la izquierda hacia la derecha, utilizaremos el móvil de la parte superior izquierda y para la ubicación de la coma lo haremos igual como en el ejercicio anterior. Ejemplo: expresar en notación científica el número 0,000000018

<u>Paso 1</u>

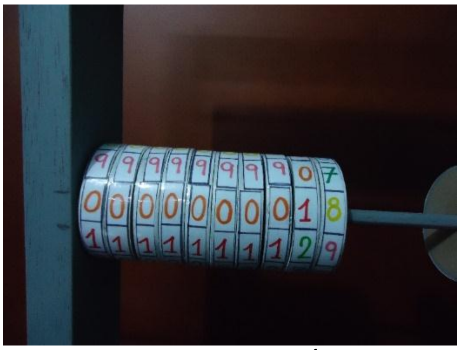


Figura 3.3.3.2.6. Cantidad formada en el Ábaco de notación científica

Paso 2

Figura 3.3.3.2.7. Rectángulo que encierra una cantidad de dos cifras

Paso 3

Figura 3.3.3.2.8. Rectángulo marca una cantidad en la regleta

Finalmente la expresión es **1,8E-8**

CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE

Realizar los ejercicios propuestos utilizando el ábaco de notación científica. La cantidad se debe expresar con un entero y tres decimales.

TABLA DE DATOS	
Números a expresar	**Notación científica**
450000000000	
560000	
0,000000098	
0,009876	
6787000000000	
564300000	
700000000000	
7867900000	
0,0000000000048	
0,000000006787	

Tabla 3.3.3.2.1. Tabla de datos

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Raíces y radicales

3.3.3.3 RAÍCES Y RADICALES

OBJETIVO: Entender e identificar el concepto de raíces y radicales.

Teoría

En matemáticas, a este signo $\sqrt{}$ se lo llama radical. Al número o la expresión que está dentro del radical se lo denomina radicando. Ahora, a toda la expresión, es decir, el signo radical y el radicando recibe el nombre de expresión radical, finalmente otra parte de una expresión radical es su índice y es la que indica la "raíz" de dicha expresión. Así por ejemplo; las raíces cuadradas tienen un índice 2, este índice por lo general no se escribe pero si el índice es tres o superior a tres se lo escribe sobre el radical, de esta manera,$\sqrt[3]{}$,$\sqrt[4]{}$, etc.

Además cuando no se puede simplificar un número para quitar una raíz cuadrada, una raíz cúbica, etc., entonces también se lo denomina radical.

Ejemplo:

$\sqrt{2}$, la raíz cuadrada de 2 no se puede simplificar, es decir, es un radical.

$\sqrt[3]{27}$, la raíz cúbica de 27 sí se puede simplificar, queda 3, es decir, no es un radical.

Un número cualquiera que sea positivo siempre tendrá dos raíces cuadradas; una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa.

Ejemplo:

La raíz de: $\sqrt{25}$ es 5 y -5.

Porque: $(5)(5) = 25 \;\; y \;\; (-5)(-5) = 25$.

Algo muy importante es que las raíces cuadradas de los números negativos no son número reales, a ellos se los llama números imaginarios.

Ejemplo:

La raíz de: $\sqrt{-16}$ es $4\, imaginario$ o $4i$.

Radicales equivalentes: Para identificar si dos radicales son equivalentes, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Expresar como potencia de exponente fraccionario.
2. Sus bases tienen que ser iguales.
3. Los exponentes fraccionarios deben ser iguales.

Ejemplo: Si tenemos dos potencias con la misma base y exponentes fraccionarios que sean equivalentes, lo pasamos a radical y nos queda dos radicales equivalentes. Esta transformación también se la puede hacer a la inversa.

$$25^{\frac{1}{3}} = 25^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{25^3} = 25\sqrt[9]{25} = \sqrt[3]{25}$$

GUÍA 12: Jugando con raíces y radicales

MATERIALES:

- ✓ Plantillas de juegos con radicales.

SALIDA $\sqrt[6]{256}$	$2^{\frac{4}{2}}$	$2\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{2^8}$	$2\sqrt[3]{4}$	$2.2^{\frac{6}{3}}$	$\sqrt[6]{2^6}$
$\sqrt[6]{2^8}$	$2^{\frac{8}{6}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$2^{\frac{9}{6}}$	$3\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[6]{4^2}$	$2.2^{\frac{2}{3}}$
$2^{\frac{6}{8}}$	$2.2^{\frac{2}{6}}$	$\sqrt[3]{2^4}$	$2.2^{\frac{1}{3}}$	$4.4^{\frac{2}{6}}$	$2^{\frac{12}{5}}$	$\sqrt[3]{2^6}$
$\sqrt[4]{2^3}$	$2.2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{4}{5}}$	$2^{\frac{4}{3}}$	$2\sqrt[6]{2^2}$	$2^{\frac{6}{8}}$	**LLEGADA** $2\sqrt[3]{2}$

Figura 3.3.3.3.1. Juego de raíces y radicales

PROCEDIMIENTO:

En esta guía presentamos una actividad basada en un juego relacionado a la equivalencia de radicales, para lo cual se sigue las siguientes instrucciones:

A partir de la casilla superior izquierda SALIDA, ir pasando de casilla en casilla, tomando en cuenta que los radicales deben ser equivalentes, puede ser lateral, superior o inferior (excepto en diagonal), hasta llegar a la casilla inferior derecha marcada con LLEGADA.

Se sugiere que pinten el camino encontrado en un tiempo designado por el profesor.

El profesor puede construir otras tablas con distintos ejercicios para que los estudiantes los resuelva en forma individual o grupal.

SALIDA $\sqrt[6]{256}$	$2^{\frac{4}{2}}$	$2\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{2^8}$	$2\sqrt[3]{4}$	$2.2^{\frac{6}{3}}$	$\sqrt[6]{2^6}$
$\sqrt[6]{2^8}$	$2^{\frac{8}{6}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$2^{\frac{9}{6}}$	$3\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[6]{4^2}$	$2.2^{\frac{2}{3}}$
$2^{\frac{6}{8}}$	$2.2^{\frac{2}{6}}$	$\sqrt[3]{2^4}$	$2.2^{\frac{1}{3}}$	$4.4^{\frac{2}{6}}$	$2^{\frac{12}{5}}$	$\sqrt[3]{2^6}$
$\sqrt[4]{2^3}$	$2.2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{4}{5}}$	$2^{\frac{4}{3}}$	$2\sqrt[6]{2^2}$	$2^{\frac{6}{8}}$	**LLEGADA** $2\sqrt[3]{2}$

Tabla 3.3.3.3.2. Juego de raíces y radicales

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Exponentes Fraccionarios

3.3.3.4 EXPONENTES FRACCIONARIOS

OBJETIVO: Aplicar correctamente el algoritmo para transformar una expresión en forma exponencial a radical y viceversa.

Teoría

Al referirnos a exponentes fraccionarios, consideramos los exponentes de la forma $^{p}/_{q}$, en donde p es un número positivo o negativo y q es un número entero positivo.

Ahora, se puede decir que una expresión elevada a un exponente fraccionario es equivalente a la raíz cuyo índice es el denominador de dicho exponente y cuyo numerador es la potencia del número o expresión que queda dentro de la raíz. Lo antes mencionado se lo expresa en forma general de la siguiente forma:

$$n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{n^p}$$

Ejemplos:

$$2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$(7n)^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{(7n)^2}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

GUÍA 13: Rompecabezas con exponentes fraccionarios

MATERIALES:

- ✓ Tablas de expresiones algebraicas
- ✓ Piezas

Figura 3.3.3.4.1. Rompecabezas de exponentes fraccionarios

PROCEDIMIENTO:

1.- Para esta guía se necesitan 4 participantes quienes se ubicarán en cada esquina de la mesa, a su vez cada uno tendrá en sus manos una tabla como en la figura 3.3.4.1. La tabla contiene una serie de expresiones con exponentes fraccionarios y con radicales.

2.- Se coloca en el centro de la mesa las piezas que contienen la respuesta o transformación respectiva de las expresiones que se encuentran en cada tabla. La intención es que los estudiantes ubiquen cada pieza en el lugar respectivo de su tabla.

3.- El maestro da la orden de empezar y los estudiantes comenzaran con la actividad descrita. En este juego las muchas de las piezas encajaran en todas la tablas, así que el estudiante que sea más rápido podrá obtener la pieza y por ende ser el ganador.

4.- Finalmente se confirmara si todas las piezas del estudiante que terminó primero están correctamente ubicadas, si es correcto el participante será el ganador, caso contrario se le mandara tarea sobre el error que haya cometido.

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Leyes de los radicales

3.3.3.5 LEYES DE LOS RADICALES

OBJETIVO: Reconocer cada una de las leyes de los radicales a problemas propuestos.

Teoría

Los radicales son las operaciones inversas de las potencias o de los exponentes, por lo tanto, se puede decir que la radicación es lo contrario a la potenciación.

De ahí que se desprenden unas leyes de los radicales que son consecuencia de las leyes de los exponentes.

1. **Raíz de un número:**

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8b} = (8b)^{\frac{1}{3}} = 2b^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[7]{c^3m^3} = (cm)^{\frac{3}{7}}$$

2. **Producto de raíces de igual índice:**

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{b^6}\,\sqrt[3]{c^9} = \sqrt[3]{b^6c^9} = b^2c^3$$

$$\sqrt[6]{n^5}\,\sqrt[6]{p} = \sqrt[6]{n^5 p}$$

3. **Cociente de dos raíces:**

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt[4]{16d^4 i^8}}{\sqrt[4]{81k^{12}}} = \sqrt[4]{\frac{16d^4 i^8}{81k^{12}}} = \frac{2di^2}{3k^3}$$

$$\frac{\sqrt[12]{a^2 b}}{\sqrt[12]{m^{12}}} = \sqrt[12]{\frac{a^2 b}{m^{12}}} = \frac{\sqrt[12]{a^2 b}}{m}$$

4. **Raíz de una potencia:**

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

$$(\sqrt{4})^6 = 4^{\frac{6}{2}} = 4^2 = 16$$

$$\sqrt[5]{32q^5} = (2q)^{\frac{5}{5}} = 2q$$

5. **Raíz de una raíz:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{7a^5}} = \sqrt[4.3]{7a^5} = \sqrt[12]{7a^5}$$

$$\sqrt{\sqrt[4]{9e^7}} = \sqrt[2.4]{9e^7} = \sqrt[8]{9e^7}$$

GUÍA 14: Bingo de las leyes de los radicales

MATERIALES:

- ✓ Ruleta de las leyes de los radicales
- ✓ Tarjetas de ejercicios con radicales (final de la guía)

Figura 3.3.3.5.1. Ruleta y tarjetas de bingo

PROCEDIMIENTO:

1.- Se reparte las tarjetas a todos los estudiantes de la clase, cada uno tendrá que llenar dichas tarjetas con 12 ejercicios de las leyes de los exponentes que deseen.

2.- Se ubica la ruleta de los radicales en la pizarra, esta ruleta está dividida en 5 partes y en cada una de ellas está escrita de forma general las leyes de los radicales, también contiene un señalador y a su vez la ruleta puede girar.

3.- La actividad consiste en hacer girar la ruleta. Al detenerse indicará una de las leyes de los radicales y los estudiantes deberán relacionar esa ley con un ejercicio de su tarjeta, si esa ley está en uno de los ejercicios de su tarjeta el estudiante la señalará con un trozo de papel, el ganador será el estudiante que llene toda su tarjeta. El docente deberá anotar la ley aparte, esto servirá para constatar al final si el ganador se hace acreedor a ese título.

FICHAS PARA RECORTAR

LEYES DE LOS RADICALES		

LEYES DE LOS RADICALES		

LEYES DE LOS RADICALES		

LEYES DE LOS RADICALES		

LEYES DE LOS RADICALES		

LEYES DE LOS RADICALES		

Figura 3.3.3.5.2. Fichas para rellenar y jugar

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Simplificación de expresiones con radicales

3.3.3.6 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES CON RADICALES

OBJETIVO: Analizar cada expresión radical y desarrollar su respectiva simplificación.

Teoría

Para simplificar una expresión con radical es importante realizar una factorización, buscar un número que multiplicado por sí mismo nos de el resultado en el subradical.

Ejemplo 1: encontrar $\sqrt{49}$

Sabemos que al multiplicar 7x7 el resultado es 49, entonces hemos factorizado el 49 en dos expresiones o factores cuyo producto es igual a la cantidad del subradical.

La factorización es un método útil para poder simplificar expresiones con radicales, puesto que descomponemos la expresión y podemos expresarla como una potencia, de esta manera cuando se tiene igual número de índice y exponente el resultado es la base.

Ejemplo 2: encontrar $\sqrt[3]{125}$

125 es factor primo de 5, por lo tanto descomponemos en 25.5, luego 25 también es factor primo de 5

Entonces,$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5.5.5} = \sqrt[3]{5^3}$ por ser el índice igual al exponente de 5 el resultado final será 5.

Podemos considerar que 125 es cubo perfecto, puesto que la raíz cubica es 5, el resultado es un número entero. De igual manera 49 es cuadrado perfecto ya que su raíz cuadrada es 7.

Ahora veamos números que no son cuadrados perfectos y cubos perfectos, pero que de igual manera al factorizar podemos simplificar el radical.

Ejemplo 3: simplificar $\sqrt{63}$

Factorizar 63 como 7.9, luego factorizar 9 como 3.3

Entonces $\sqrt{7.3.3} = \sqrt{7.3^2}$ aplicando leyes de los radicales tenemos $\sqrt{7}\sqrt{3^2}$, por tener 3 su exponente igual al índice del radical el resultado es 3

Por lo tanto la raíz cuadrada de 63 es $3\sqrt{7}$

Cuando los radicales contienen variables como por ejemplo $\sqrt{25x^2y^4}$ se procede de igual manera a factorizar, es importante en este tema tener en cuenta las leyes de los exponentes.

Ahora bien, con el coeficiente procedemos a realizarlo como en los casos anteriores

Factorizar 25= 5.5

Factorizar $y^4 = (y^2)^2$

Luego $\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{5.5.x^2(y^2)^2} = \sqrt{5^2.x^2(y^2)^2}$ separamos individualmente $\sqrt{5^2}\sqrt{x^2}\sqrt{(y^2)^2}$

Finalmente el resultado es $\mathbf{5xy^2}$

GUÍA 15: Juego de las 4 fichas con radicales

MATERIALES:

- ✓ Un dado cúbico
- ✓ Un dado tetraédrico
- ✓ Hoja de juego (final de la guía)
- ✓ Fichas (pequeños trozos de papel)

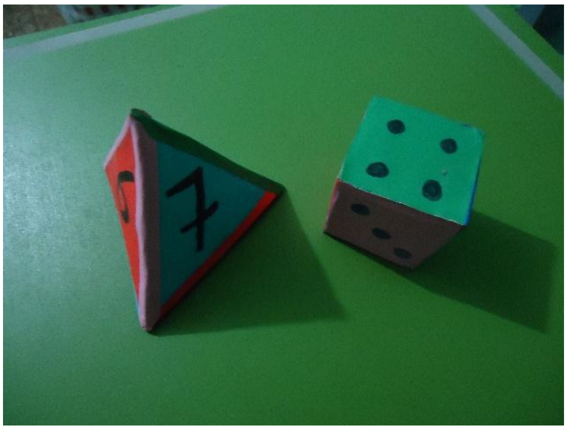


Figura 3.3.3.6.1. Dados

PROCEDIMIENTO:

Este juego se puede realizar con un máximo cuatro jugadores. La hoja de juego se encuentra al final de esta guía junto a otra hoja que contiene la estructura del dado tetraédrico, los participantes deberán recortar y armar el dado.

1- Todos los participantes empiezan lanzando el dado cúbico, el que saque el mayor número es el que empieza el juego.

2- Se lanza los dos dados (dado cubico y dado tetraédrico) al mismo tiempo, el dado cubico nos indicará el índice de un radical y el dado tetraédrico la potencia del subradical que tendrá como base **9**.

3- El participante deberá simplificar esta expresión y poner la ficha sobre el resultado que se encuentra en la hoja de juego. Si el resultado no aparece el jugador pierde la oportunidad y se pasa al siguiente.

4- Cuando se simplifique una expresión y en éste ya se encuentra colocada la ficha el participante pierde el turno.

5- Si el participante simplifica mal una expresión y coloca en otra respuesta, el resto de participantes pueden intervenir, corregir y poner ellos su ficha en el lugar respectivo.

6- Gana el jugador que llene las primeras 4 casillas de la hoja.

$9^4.3$	81	$3.3\sqrt[5]{81}$
$3.3\sqrt[4]{81}$	$3.3\sqrt[6]{9^3}$	9^4
$9^3.$	$9\sqrt[5]{9^4}$	81.9
$9^2\sqrt[4]{9}$	$81\sqrt[3]{81}$	$9\sqrt[6]{9}$

Figura 3.3.3.6.2. Hoja de juego con radicales

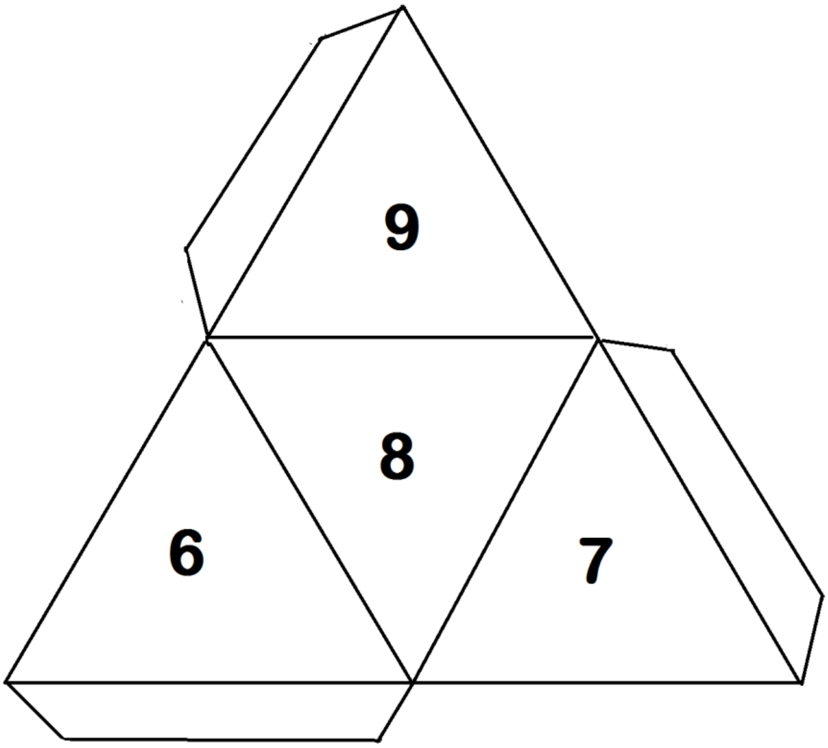


Figura 3.3.3.6.3. Dado tetraédrico

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Reducción de radicales a un índice común

3.3.3.7 REDUCCIÓN DE LOS RADICALES A UN ÍNDICE COMÚN

OBJETIVO: Aplicar correctamente el algoritmo para reducir radicales a un índice común.

Teoría

Para realizar la reducción de un radical a un índice común, es recomendable realizar los siguientes pasos:

1. Encontrar el mínimo común múltiplo (mcm) de los índices. Este será el índice común de los radicales.
2. Dividir el índice común para cada uno de los índices de los radicales.
3. Elevar el radicando al valor obtenido en el paso anterior, respectivamente.

Ejemplos:

Reducir a un índice común los siguientes radicales.

1. $\sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{2^2.3^2}\,,\ \sqrt[4]{2^2.3^3}$

Como los índices de las raíces son: 2, 3 y 4, el mcm es 12.

Luego dividimos 12 entre 2, 3 y 4, que nos da: 6, 4 y 3, respectivamente.

Finalmente utilizamos estos números como exponentes de los radicandos respectivos.

Así,

1. $\sqrt[12]{2^6}$, $\sqrt[12]{(2^2.3^2)^4}$, $\sqrt[12]{(2^2.3^3)^3}$

Aplicando las propiedades de las potencias tenemos,

$= \sqrt[12]{2^6}$, $\sqrt[12]{2^8.3^8}$, $\sqrt[12]{2^6.3^9}$

Elevando las cantidades subradicales a su respectiva potencia:

$= \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{(256)(6\,561)}$, $\sqrt[12]{(64)(19\,683)}$

Finalmente realizamos el producto de los factores que están dentro del radical,

$= \sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{1\,679\,616}$, $\sqrt[12]{1\,259\,712}$

2. $\sqrt{5x}$, $\sqrt[3]{4x^2y}$, $\sqrt[6]{7a^3b}$

El mcm de 2, 3 y 6 es: 6.

Entonces, 6:2 = 3, 6:3 = 2, 6:6 = 1

$= \sqrt[6]{(5x)^3}$, $\sqrt[6]{(4x^2y)^2}$, $\sqrt[6]{(7a^3b)^1}$

$= \sqrt[6]{125x^3}$, $\sqrt[6]{16x^4y^2}$, $\sqrt[6]{7a^3b}$

3. $3\sqrt[3]{a^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[6]{b^3}$, $4\sqrt[9]{x^5}$

m.c.m de 3, 6 y 9 es: 18

Por tanto, 18:3 = 6, 18:6 = 3, 18:9 = 2

$= 3\sqrt[18]{(a^2)^6}$, $\frac{1}{2}\sqrt[18]{(b^3)^3}$, $4\sqrt[18]{(x^5)^2}$

$= 3\sqrt[18]{a^{12}}$, $\frac{1}{2}\sqrt[18]{b^9}$, $4\sqrt[18]{x^{10}}$

GUIA 16: Juego de reducir radicales a un índice común con un dado.

MATERIALES:

- ✓ Un dado
- ✓ Hoja de juego

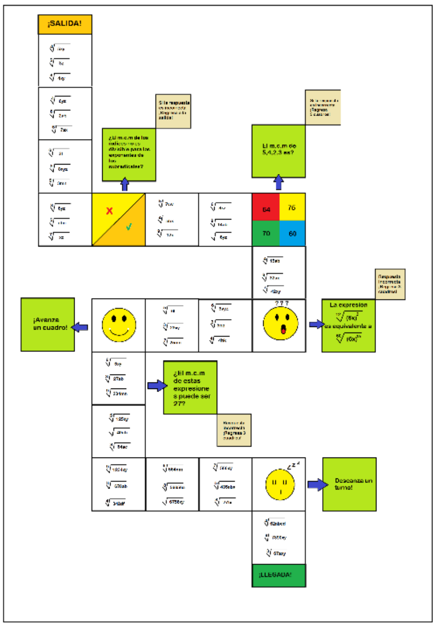


Figura 3.3.3.7.1. Hoja de juego

PROCEDIMIENTO:

Este juego se puede jugar con 3 participantes

1- En cada casilla se encuentra tres radicales con sus índices diferentes, la regla consiste en lanzar el dado y recorrer los puestos según su número, cuando se llega a la casilla el estudiante deberá en 5 segundos encontrar el índice común de esos radicales y decirlo, para ello el resto de participantes deberán constatar si es correcto o no. Si la respuesta es correcta el participante que lanzo el dado se quedara en ese puesto, caso contrario sigue en la línea de salida.

2- Hay casillas que tienen preguntas específicas, si el participante cae en unas de estas tendrá que responderlas en el igual tiempo designado. Puesto que estas casillas tienen su propia regla el participante deberá responder correctamente para ubicarse en ese lugar, caso contrario cumplirá la sanción respectiva.

3- Cuando se está cerca del final y por ejemplo le falta tres casillas y le sale en el dado cuatro el participante retrocederá hasta cumplir el número indicado por el dado, en este caso se quedará en el penúltimo lugar del camino de este juego.

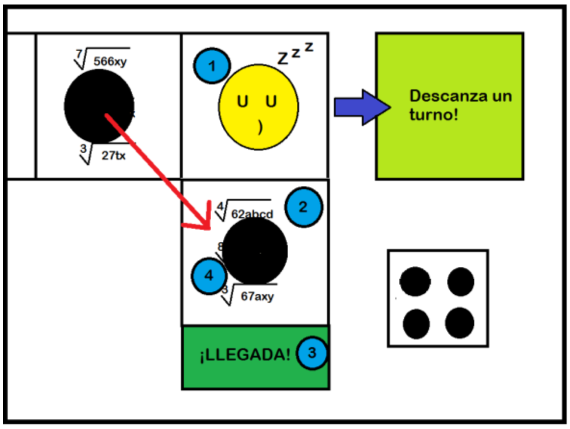


Figura 3.3.3.7.2. Demostración de la regla 3

4- Gana el participante que llega primero, y si se acaba el tiempo de clase ganara en participante que esté más cerca de la línea de meta.

Hoja de juego

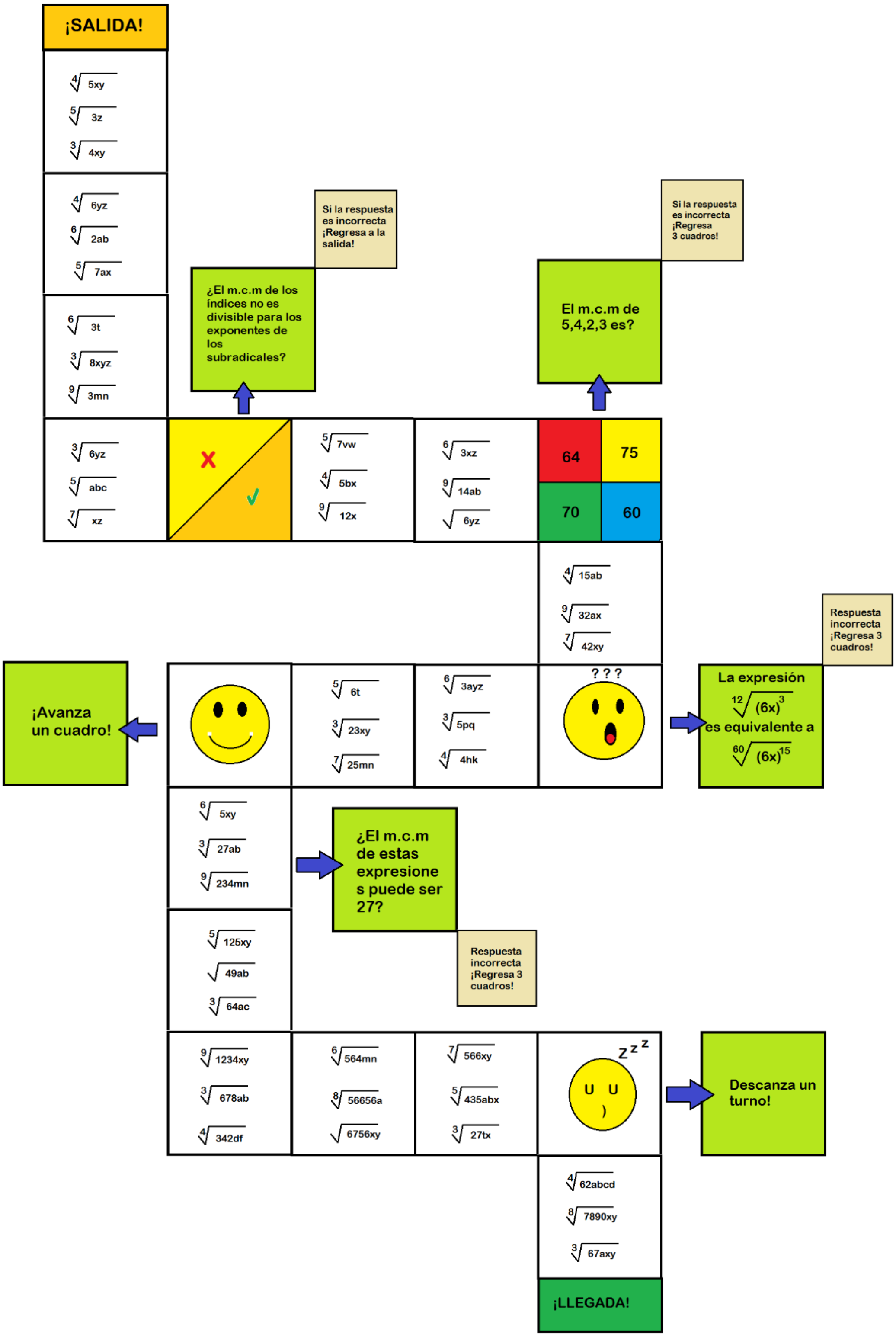


Figura 3.3.3.7.3. Hoja de juego con radicales de índice común

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Extracción de factores de un radical

3.3.3.8 EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL

OBJETIVO: Extraer factores algebraicos de los radicales de diferente índice aplicando algoritmos matemáticos.

Teoría

En ciertos ejercicios relacionados a radicales, es conveniente extraer los factores que se puedan para que la expresión quede lo más simple posible. Para esto, es indispensable que la potencia del factor sea igual o mayor que el índice de la raíz. Para poder realizar lo que acabamos de mencionar es recomendable aplicar el siguiente procedimiento:

1. Descomponer en factores el radicando.
2. Escribimos los factores como potencias de igual exponente que el índice de la raíz.
3. Aplicamos la ley de la multiplicación para los radicales.
4. Simplificamos los radicales con el exponente que sean iguales.

Veamos con unos ejemplos como resolverlos.

Ejemplo 1:

$\sqrt[3]{54}$

Descomponemos la cantidad subradical en factores,

$= \sqrt[3]{2.3^3}$

Aplicamos la ley de la multiplicación de radicales,

$= \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3^3}$

Simplificamos los exponentes de los factores con el radical para que nos quede la respuesta final,

$= 3\sqrt[3]{2}$

Ejemplo 2: $\sqrt{\frac{512}{45}}$

En este ejemplo vamos a resolver directamente,

$$\sqrt{\frac{512}{45}} = \sqrt{\frac{2^9}{3^2.5}} = \frac{\sqrt{2^9}}{\sqrt{3^2.5}} = \frac{2^4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Ejemplo 3:

$$\sqrt[3]{7a^{10}b^9} = \sqrt[3]{7a^3.a^3.a^3.a.b^3.b^3.b^3} = a^3b^3\sqrt[3]{7a}$$

GUIA 17: Dominó de radicales

MATERIALES:

- ✓ Fotocopias de la plantilla de fichas.
- ✓ Cuaderno.
- ✓ Tijeras.

PROCEDIMIENTO:

Recortamos las 24 fichas de dominó de la figura 3.3.3.6.1.

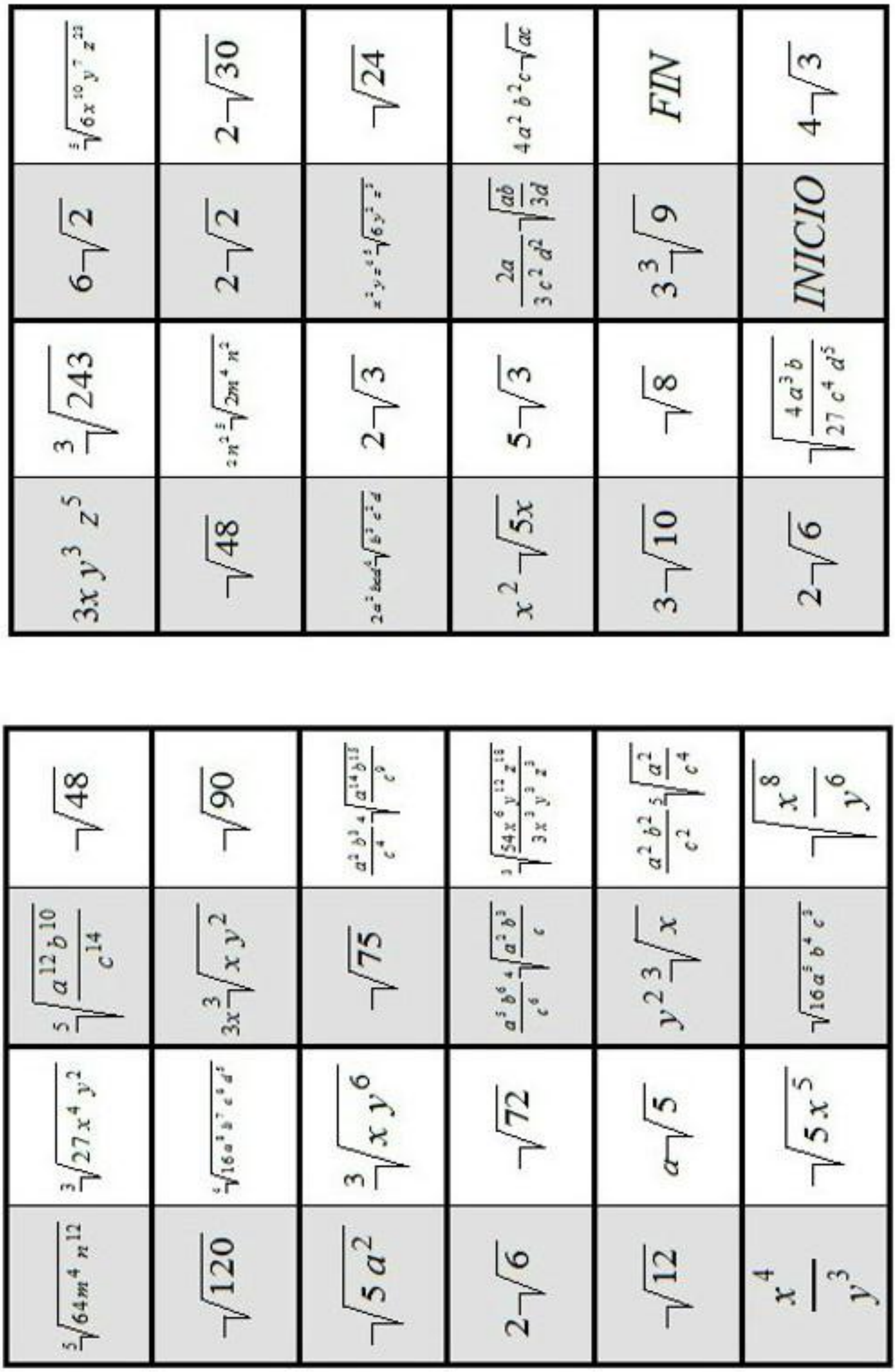


Figura 3.3.3.6.1. Fichas de dominó

Formamos con ellas una cadena empezando por la ficha de INICIO y terminando con la de FIN, sin importar el orden. De la siguiente manera por ejemplo:

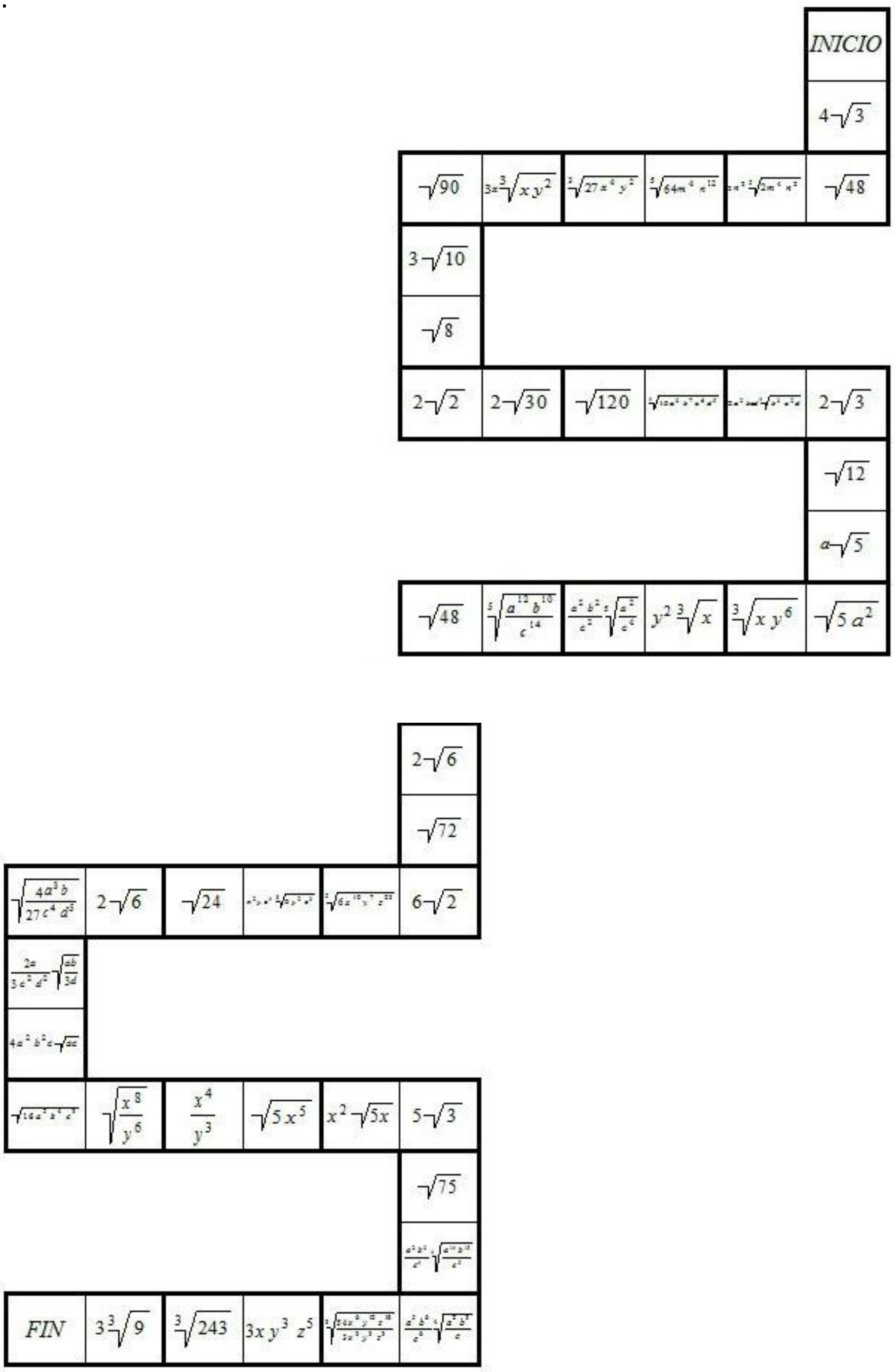


Figura 3.3.3.6.2. Cadena de fichas

Luego la pegamos en un cuaderno para empezar el juego.

Reglas:

- ✓ Dos a tres jugadores.
- ✓ Repartir todas las fichas de dominó.
- ✓ Empieza el jugador que tiene la ficha de INICIO.
- ✓ En orden los participantes deben ir colocando sus fichas acopladas con la primera ficha. Es importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios en el cuaderno a continuación de la cadena de dominó.
- ✓ En caso de que un jugador no pueda ubicar una ficha por no tener el valor correcto. Pierde el turno.
- ✓ Gana el primero que se quede sin fichas.

Observaciones generales:

Este dominó está formado de 24 fichas, las cuales se estructuran de solo 22 expresiones que se refieren a ejercicios sobre extracción de radicales, y estas corresponden a otras 22 expresiones que son las respuestas simplificadas de dichos radicales. Además constan de un INICIO y un FIN.

La figura 3.3.3.6.3 demuestra lo antes dicho:

$\sqrt[3]{243}$	$\sqrt{48}$	$2\sqrt{6}$
$\sqrt{5a^2}$	$\sqrt{90}$	$3\sqrt{10}$
$\sqrt[3]{xy^6}$	$\frac{a^2b^3}{c^4}\sqrt[4]{\frac{a^{14}b^{15}}{c^9}}$	$\frac{a^5b^6}{c^6}\sqrt[4]{\frac{a^2b^3}{c}}$
$\sqrt{5x^5}$	$\sqrt[3]{\frac{54x^6y^{12}z^{18}}{3x^3y^3z^3}}$	$3xy^3z^5$
$\sqrt[5]{6x^{10}y^7z^{23}}$	$\sqrt[5]{\frac{a^{12}b^{10}}{c^{14}}}$	$\frac{a^2b^2}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^2}{c^4}}$
$\sqrt{\frac{4a^3b}{27c^4d^5}}$	$\sqrt{\frac{x^8}{y^6}}$	$\frac{x^4}{y^3}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt[4]{16a^8b^7c^6d^5}$	$2a^2bcd\sqrt[4]{b^3c^2d}$
$\sqrt{120}$	$\sqrt[5]{64m^4n^{12}}$	$2n^2\sqrt[5]{2m^4n^2}$
$\sqrt{24}$	$\sqrt[3]{27x^4y^2}$	$3x\sqrt[3]{xy^2}$
$\sqrt{75}$	$\sqrt{16a^5b^4c^3}$	$4a^2b^2c\sqrt{ac}$
$\sqrt{72}$	$\sqrt{12}$	$2\sqrt{3}$
INICIO	$\sqrt{48}$	$4\sqrt{3}$

Figura 3.3.3.6.3. Fichas de respuestas

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Racionalización de expresiones monomias y binomias

3.3.3.9 RACIONALIZACIÓN DE EXPRESIONES MONOMIAS Y BINOMIAS

OBJETIVO: Reconocer y resolver expresiones algebraicas tanto monomias como binomias en los que interviene la racionalización.

Teoría

Cuando hablamos de racionalización de radicales, debemos tener presente que es un proceso en el que eliminamos la raíz o las raíces del denominador de una fracción.

Racionalización de un monomio

Es mucho más sencillo aplicar la racionalización cuando tenemos solo un radical en el denominador, como en la fracción $\frac{2}{\sqrt{3}}$, lo que debemos hacer es, multiplicar tanto el numerador como el denominador por una expresión tal que nos dé un cuadrado perfecto en el denominador, en nuestro caso sería por $\sqrt{3}$. De la siguiente manera:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Después se elimina la raíz cuadrada del denominador ya que el exponente de la cantidad subradical es 2, se puede eliminar con la raíz cuadrada,

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Nota: tener presente que no es lo mismo $\sqrt{3^2}$ que $(\sqrt{3})^2$

Racionalización de un monomio con índice radical mayor que 2

La racionalización de monomios con índices mayores que 2, es más complicado pero se procede de la siguiente forma:

Se pide racionalizar la siguiente expresión radical:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{8a^3b^4}}$$

Antes del procedimiento, a todas las cantidades subradicales debemos obtener la raíz enésima. Es decir, a los números enteros elevados que no tengan exponente. Así:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3a^3b^4}}$$

Ahora, la cantidad que vamos a multiplicar al numerador y al denominador, tiene un proceso distinto al ejercicio anterior.

Las cantidades exponenciales de los subradicales para multiplicar tanto al numerador como al denominador, será el número de exponente que falta para que sea igual al índice de la raíz.

Siendo así, para $\sqrt[5]{2^3a^3b^4}$ es $\sqrt[5]{2^2a^2b}$, de modo que al ser multiplicados entre sí, los exponentes serán igual al índice de la raíz.

Ahora, procedemos a realizar la multiplicación del numerador y el denominador por esta cantidad.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3a^3b^4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2a^2b}}{\sqrt[5]{2^2a^2b}} = \frac{2\sqrt[5]{2^2a^2b}}{\sqrt[5]{2^5a^5b^5}}$$

Sacamos de la raíz las cantidades que tienes igual exponente al del índice de la raíz y simplificamos.

$$\frac{2\sqrt[5]{2^2a^2b}}{2ab}=\frac{\sqrt[5]{4a^2b}}{ab}$$

Racionalización de binomios

Para racionalizar binomios se procede de la siguiente manera:

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, aquí podemos utilizar la identidad siguiente: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, que representa a la suma por la diferencia. En estos ejercicios se debe considerar que si existe una suma, su conjugado será la diferencia y caso contrario, si existe una diferencia, su conjugado será la suma. Tomemos por ejemplo el siguiente ejercicio:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}$$

En este caso su conjugado será la suma, $\sqrt{3}+2$, así:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}$$

Realizamos la multiplicación y resolvemos,

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}=\frac{\sqrt{3}+2}{-1}=-\sqrt{3}-2$$

Ejemplo 2:

Racionalizar el siguiente ejercicio.

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$$

Su conjugado es: $4\sqrt{2}+3\sqrt{3}$, entonces:

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$$

Resolvemos,

$$=\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2}=\frac{12\sqrt{4}+9\sqrt{6}-8\sqrt{6}-6\sqrt{9}}{(16)(2)-(9)(3)}$$

$$=\frac{24+\sqrt{6}-18}{32-27}$$

Finalmente la respuesta será,

$$=\frac{6+\sqrt{6}}{5}$$

GUÍA 18: Dominó de radicales

MATERIALES:

- ✓ Fotocopias de la plantilla de fichas.
- ✓ Cuaderno.
- ✓ Tijeras.

PROCEDIMIENTO:

Recortamos las 24 fichas de dominó de la figura 3.3.3.7.1.

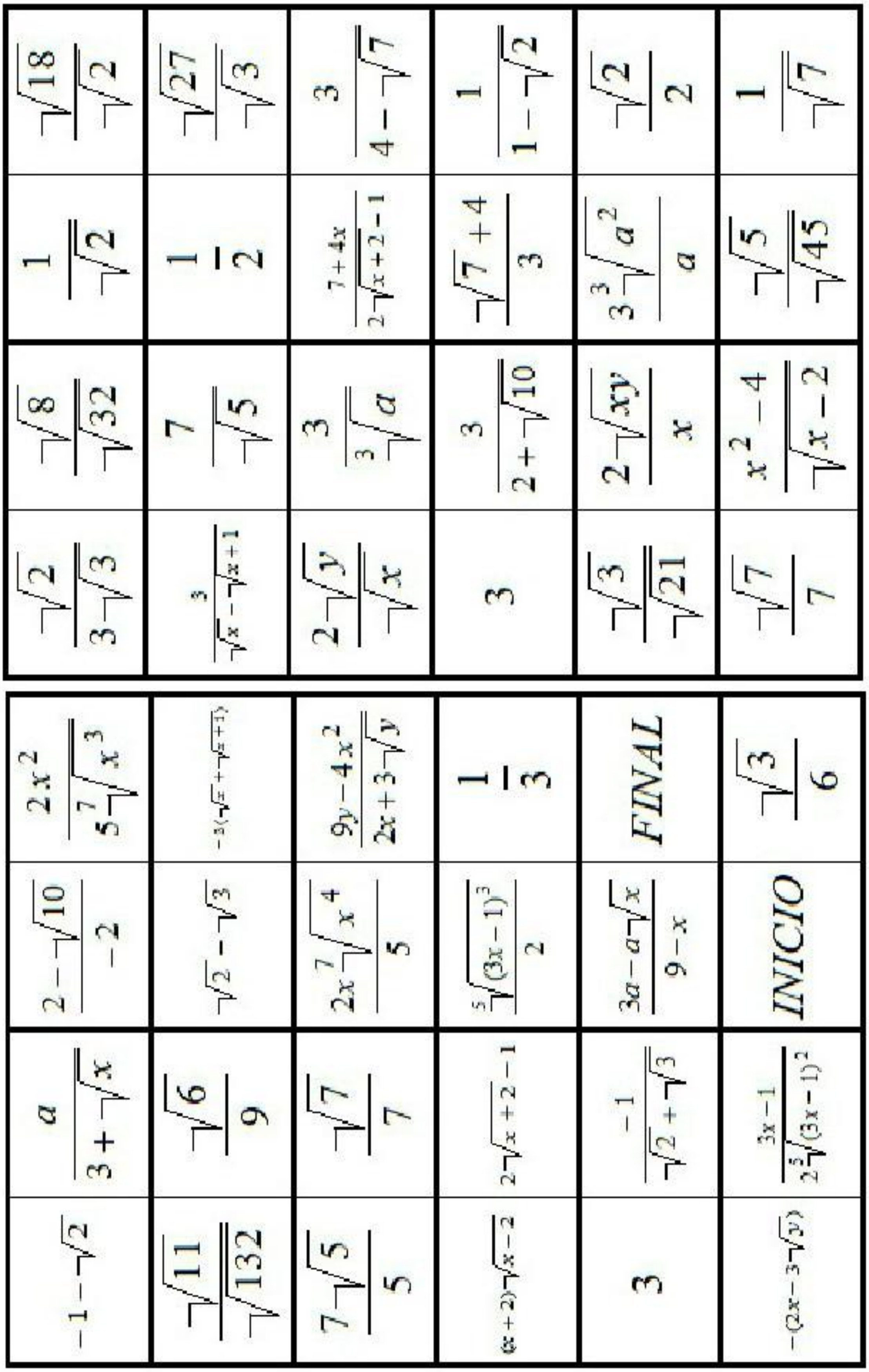


Figura 3.3.3.7.1. Fichas de dominó

Formamos con ellas una cadena empezando por la ficha de INICIO y terminando con la de FIN, sin importar el orden. De la siguiente manera por ejemplo:

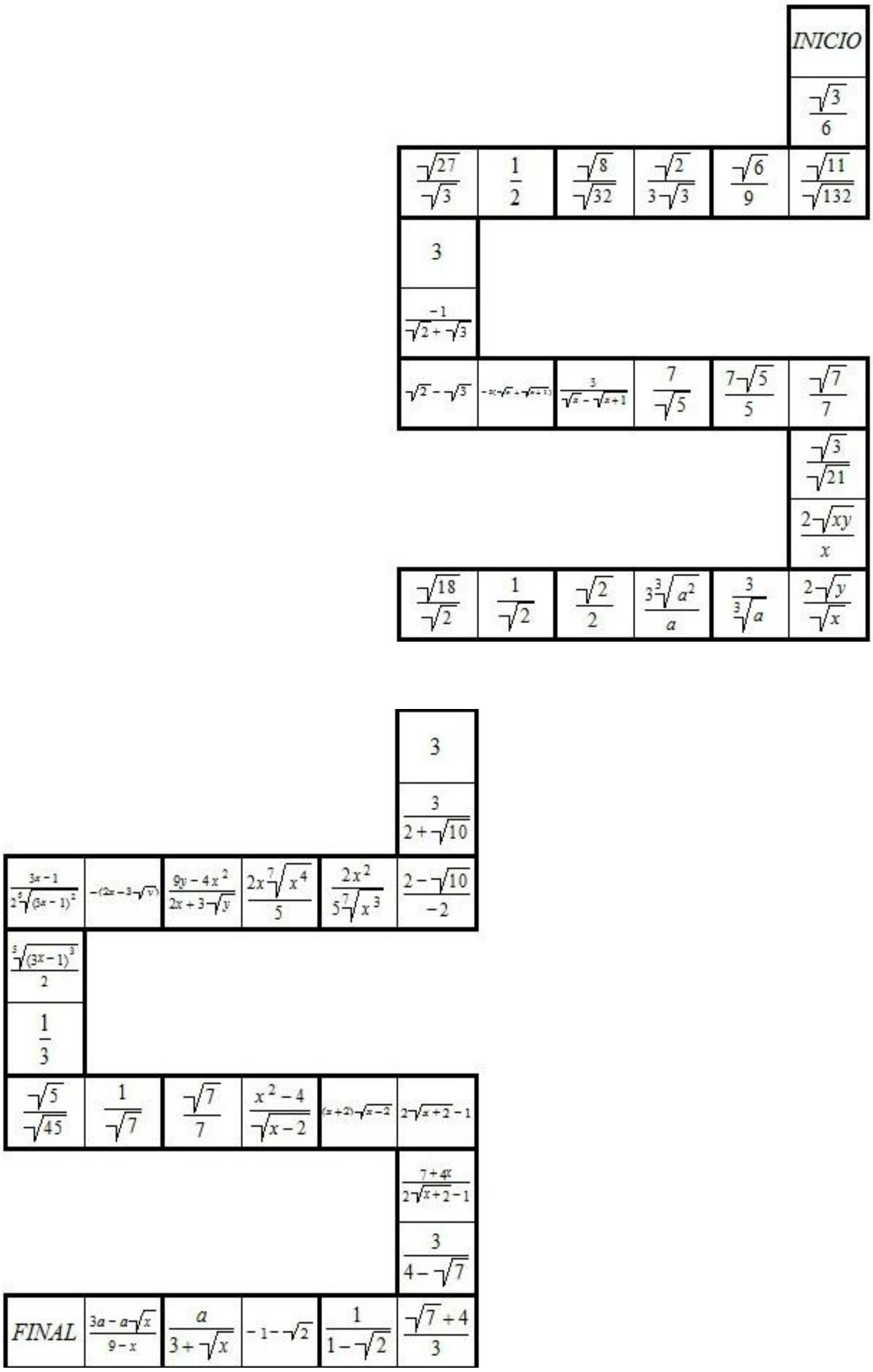


Figura 3.3.3.7.2. Cadena de fichas

Luego la pegamos en un cuaderno para empezar el juego.

Reglas:

- ✓ Dos a tres jugadores.
- ✓ Repartir todas las fichas de dominó.
- ✓ Empieza el jugador que tiene la ficha de INICIO.
- ✓ En orden los participantes deben ir colocando sus fichas acopladas con la primera ficha. Es importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios en el cuaderno a continuación de la cadena de dominó.
- ✓ En caso de que un jugador no pueda ubicar una ficha por no tener el valor correcto. Pierde el turno.
- ✓ Gana el primero que se quede sin fichas.

Observaciones generales:

Este dominó está formado de 24 fichas, las cuales se estructuran de solo 22 expresiones que se refieren a ejercicios sobre racionalización de radicales, y estas corresponden a otras 22 expresiones que son las respuestas simplificadas de dichos radicales. Además constan de un INICIO y un FINAL.

La figura 3.3.3.7.3 demuestra lo antes dicho:

$\frac{a}{3+\sqrt{x}}$
$\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
$\frac{3}{\sqrt[3]{a}}$
$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$
$\frac{2x^2}{5\sqrt[7]{x^3}}$
$\frac{3x-1}{2\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$
$\frac{-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
$\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$
$\frac{9y-4x^2}{2x+3\sqrt{y}}$
$\frac{7+4x}{2\sqrt{x+2}-1}$
$\frac{3}{2+\sqrt{10}}$
INICIO

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$	3
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$	3
$\frac{3}{4-\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{7}+4}{3}$
$\frac{1}{1-\sqrt{2}}$	$-1-\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$
$\frac{7}{\sqrt{5}}$	$\frac{7\sqrt{5}}{5}$
$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{6}}{9}$
$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$	$\frac{\sqrt{7}}{7}$
$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{132}}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$

Figura 3.3.3.7.3. Fichas de respuestas

UNIVERSIDAD DE CUENCA

FACULTAD DE FILOSOFÍA LETRAS Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Guía de Laboratorio de Matemáticas

Adicción y sustracción de radicales

3.3.3.10 ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

OBJETIVO: Reconocer y resolver sumas y restas de expresiones algebraicas que contienen radicales.

Teoría

Para poder sumar y restar radicales, es importante en primer lugar que sean semejantes, es decir, el índice del radical y la cantidad subradical tienen que ser iguales, caso contrario no se puede realizar dichas operaciones.

Cuando los radicales son semejantes, el resultado de estas operaciones se lo obtiene sumado los coeficientes y tanto el índice como la cantidad subradical se lo deja uno solo. En forma general se expresa así:

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1:

$$-5\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 9\sqrt[3]{7} = (-5 - 2 + 9)\sqrt[3]{7} = 2\sqrt[3]{7}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2}{3}\sqrt{3x} + \frac{1}{3}\sqrt{3x} - 12\sqrt{3x} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 12\right)\sqrt{3x} = -11\sqrt{3x}$$

Ahora, existen los casos en los que la cantidad subradical es una expresión en la que se puede extraer sus factores para poder ser semejantes, en estos casos se procede de la siguiente manera:

Ejemplo 3:

$2\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{108}-\sqrt{80}$

Este es una operación combinada en donde interviene la suma y la resta de radicales que tienen el mismo índice pero no tienen la misma cantidad subradical. Esto no quiere decir que no se pueda resolver. Se lo resuelve primero factorizando cada una de las cantidades subradicales de tal modo que:

45	3
15	3
5	5
1	

Al número 45 podemos escribirlo en sus factores primos tomándolos de dos en dos puesto que está dentro de una raíz cuadrada, si fuera una raíz cubica, se tomarían de tres en tres:

$$45=3^2.5$$

Realizamos el mismo procedimiento con el 180 y con el 80, así

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Escribiéndolos en factores primos sería:

$180 = 2^2 . 3^2 . 5$

$80 = 2^2 . 2^2 . 5$

Ahora los escribimos dentro del radical,

$= 2\sqrt{5} + \sqrt{3^2 . 5} + \sqrt{2^2 . 3^2 . 5} - \sqrt{2^2 . 2^2 . 5}$

Extraemos los factores con igual radical,

$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 2.3\sqrt{5} - 2.2\sqrt{5}$

Multiplicamos los coeficientes fuera del radical,

$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

Ahora sí podemos realizar las sumas y restas de los radicales, ya que tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

$= (2 + 3 + 6 - 4)\sqrt{5}$
$= 7\sqrt{5}$

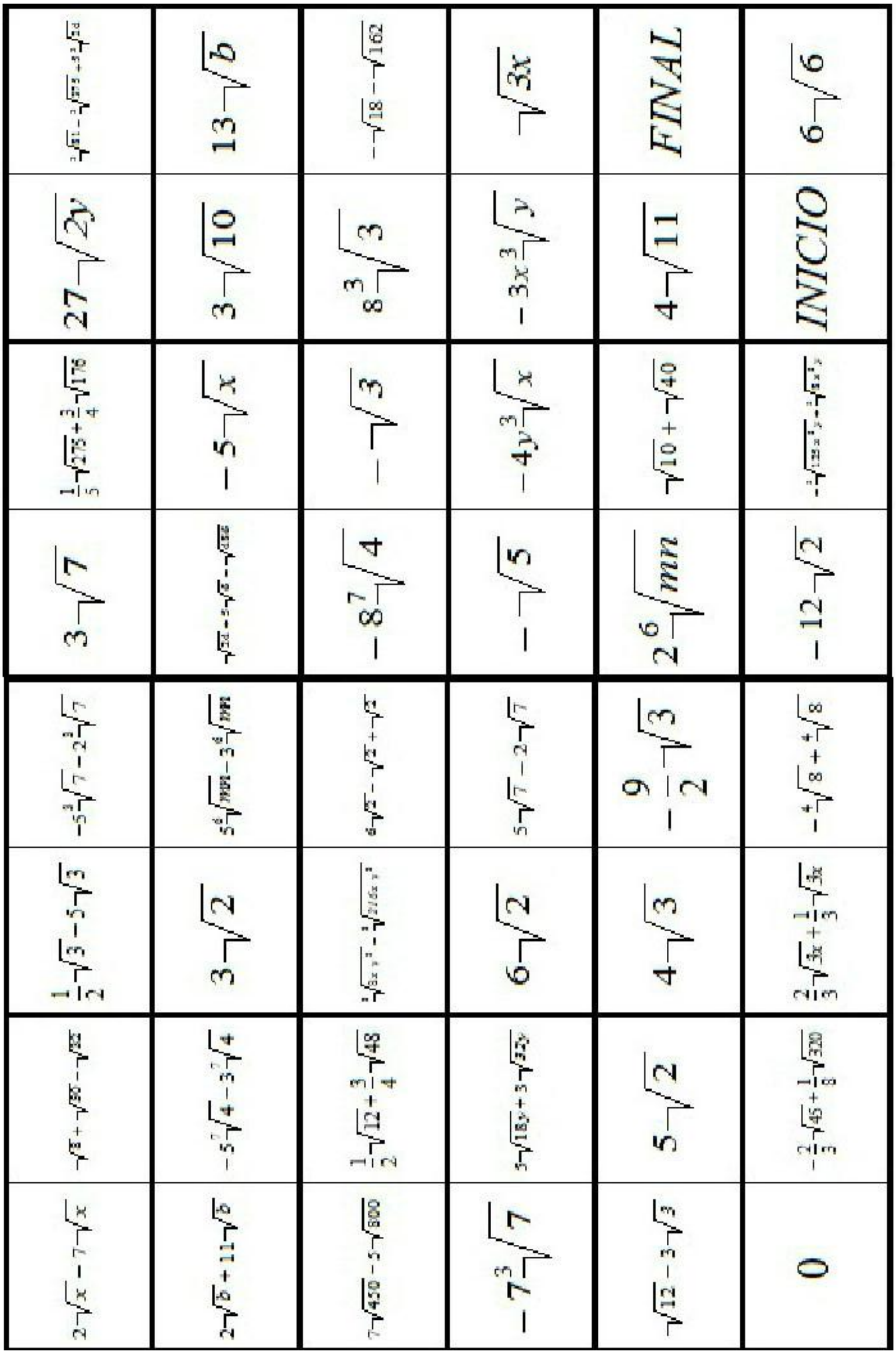
GUÍA 19: Dominó de radicales

MATERIALES:

- ✓ Fotocopias de la plantilla de fichas.
- ✓ Cuaderno.
- ✓ Tijeras.

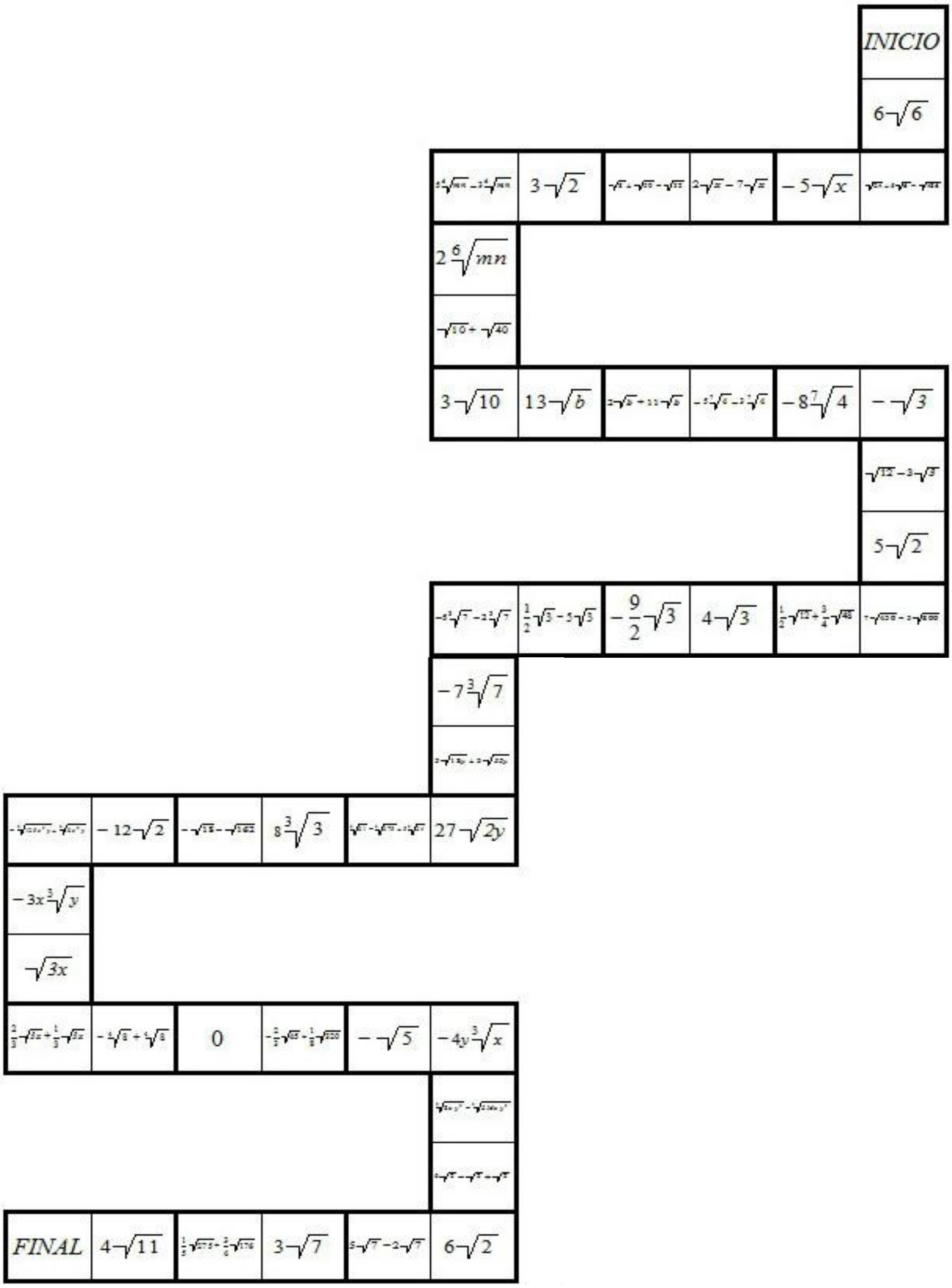
PROCEDIMIENTO:

Recortamos las 24 fichas de dominó de la figura 3.3.3.10.1.



Grafica 3.3.3.10.1. Fichas de dominó

Formamos con ellas una cadena empezando por la ficha de INICIO y terminando con la de FIN, sin importar el orden. De la siguiente manera por ejemplo:



Grafica 3.3.3.10.2. Cadena de dominó

Luego la pegamos en un cuaderno para empezar el juego.

Reglas:

- ✓ Dos a tres jugadores.
- ✓ Repartir todas las fichas de dominó.
- ✓ Empieza el jugador que tiene la ficha de INICIO.
- ✓ En orden los participantes deben ir colocando sus fichas acopladas con la primera ficha. Es importante que los estudiantes desarrollen los ejercicios en el cuaderno a continuación de la cadena de dominó.
- ✓ En caso de que un jugador no pueda ubicar una ficha por no tener el valor correcto. Pierde el turno.
- ✓ Gana el primero que se quede sin fichas.

Observaciones generales:

Este dominó está formado de 24 fichas, las cuales se estructuran de solo 22 expresiones que se refieren a ejercicios sobre adición y sustracción de radicales, y estas corresponden a otras 22 expresiones que son las respuestas simplificadas de dichas operaciones. Además constan de un INICIO y un FINAL.

La figura 3.3.3.7.3 demuestra lo antes dicho:

$\frac{1}{5}\sqrt{275}+\frac{3}{4}\sqrt{176}$	$-5\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{7}$	$-7\sqrt[3]{7}$
$7\sqrt{450}-5\sqrt{800}$	$5\sqrt[6]{mn}-3\sqrt[6]{mn}$	$2\sqrt[6]{mn}$
$\frac{1}{2}\sqrt{12}+\frac{3}{4}\sqrt{48}$	$6\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
$-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}$	$5\sqrt{7}-2\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}$
$\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{375}+5\sqrt[3]{\ }$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}-5\sqrt{3}$	$-\frac{9}{2}\sqrt{3}$
$-\sqrt[3]{125x^3y}+\sqrt[3]{8}$	$-\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{8}$	0
$\sqrt{10}+\sqrt{40}$	$-5\sqrt[7]{4}-3\sqrt[7]{4}$	$-8\sqrt[7]{4}$
$2\sqrt{b}+11\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}-7\sqrt{x}$	$-5\sqrt{x}$
$-\sqrt{18}-\sqrt{162}$	$\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$	$3\sqrt{2}$
$\sqrt[3]{8xy^3}-\sqrt[3]{216x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3x}+\frac{1}{3}\sqrt{3x}$	$\sqrt{3x}$
$5\sqrt{18y}+3\sqrt{32y}$	$\sqrt{12}-3\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
INICIO	$\sqrt{24}+5\sqrt{6}-\sqrt{486}$	$6\sqrt{6}$

Grafica 3.3.3.10.4. Fichas de respuestas

CONCLUSIONES GENERALES

- La educación es el pilar fundamental para el desarrollo de la sociedad, es por eso que la enseñanza por parte del docente debe darse de manera clara y efectiva para que el estudiante comprenda de la mejor manera, más aún en el área de las matemáticas en las que es necesario el empleo de material didáctico que permite al estudiante desarrollar su pensamiento y lógica sobre su aprendizaje.

- El material didáctico es una herramienta de apoyo muy importante para la enseñanza de las matemáticas, el uso del mismo permite a los estudiantes asimilar los conocimientos con mucha reflexión y entendimiento, mejorando así su desempeño académico.

- Con la encuesta realizada a los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca se pudo evidenciar la necesidad de utilizar materiales didácticos en su aprendizaje, pues en su preparación para ser docentes conlleva a que los contenidos queden totalmente dominados y así poderlos aplicar en el campo profesional.

- La guía didáctica es un material de complemento en el aprendizaje de los estudiantes, constituye un instrumento necesario para mejorar la enseñanza-aprendizaje, pues contiene diferentes actividades didácticas que el estudiante puede realizar al final de un tema de clase.

RECOMENDACIONES

- Las actividades que se desarrollan en papeles se recomienda sacar copias y tenerlos de manera anticipada, pues esto evita inconvenientes en el tiempo y orden al momento de utilizarlos.

- Las guías contienen juegos, a su vez estas actividades pueden ser utilizadas al momento de abordar el álgebra elemental en el colegio, cuando los futuros docentes ejerzan esta noble profesión.

- El material didáctico que se emplea en algunos casos es de madera, sin embargo para la elaboración de los mismos se pueden hacer en papel, esto facilitaría la adquisición de estos recursos a los estudiantes y al profesor.

- A más de los ejercicios propuestos en cada guía es importante que el estudiante busque otros problemas de álgebra en los cuales se pueda aplicar los materiales didácticos, esto mejoraría su aprendizaje.

- De acuerdo al uso excesivo de ciertos materiales estos se pueden desgastar o romper, por ello es importante elaborar más de uno, por ejemplo, el dado tetraédrico, así se evita inconvenientes al momento de realizar las actividades de las guías.

BIBLIOGRAFÍA

Alfonso, Bernardo Gómez. *uv.es*. 2010. 15 de 10 de 2014.

Alonso, Natalia y. *didacticas a traves del tiempo*. 22 de abril de 2008. 16 de 10 de 2014.

Antonio Medina, Francisco Mata. *Didactica General*. 2009. 26 de noviembre de 2014.

Arroyo, Antonio. *El departamento de orientación: atención a la diversidad*. Madrid: NARCEA S. A., 1994.

Burgos, Zelmy. *Naturaleza y funcion de la educacion popular*. 11 de octubre de 2007. 19 de 12 de 2014.

Checa, Andrés Nortes. *Matemáticas, universidad y sociedad*. Lérida: Poblagràfic, S. A., 1993.

Córdova, Dolores. *Desarrollo cognitivo, sensorial, motor y psicomotor en la infancia*. Málaga: INNOVA, 2011.

Cruz, Juan Antonio García. *Matemáticas en Secundaria*. 2010. 16 de 10 de 2014.

Dewey. «La Pedagogia y la escuela nueva.» 06 de 2010. *la pedagogia y la escuela nueva.* 16 de 10 de 2014.

El Comercio. «El Ecuador necesita una nueva escuela.» *Debate* Mayo de 2009: 3.

«Escuela Nueva.» 06 de 2010. *La Pedagogia y la Escuela Nueva.* 16 de 10 de 2014.

Feldman, Daniel. «didactica general.» Feldman, Daniel. *didactica general*. buenos aires, 2010. 14.

Froebel. *biblioteca virtual*. 2003. 24 de noviembre de 2014.

Fuentelsaz Gallego, Carmen , Teresa Icart Iser y Anna Pulpón Segura. *Elaboración y presentación de un proyecto de investigación y una tesina*. Barcelona: PUBLICACIONS I EDITOCIONS DE LA UNIVESITAT DE BARCELONA, 2006.

Fuentelsaz Gallego, Carmen, Teresa Icart Isern y Ana Pulpón Segura. *Elaboración y presentación de un proyecto de investigación y una tesina*. Barcelona: PUBLICACIONS I EDICIONS DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA, 2006.

Gardner, Howard. *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. PAIDÓS, 2015.

Gonzales, margarita. «escuela tradicional-nueva tecnocratica y critica.» 10 de 2010. *ucol.* 16 de 10 de 2014.

Hernandez, Antonio. *ujaen.es*. 2011. 14 de diciembre de 2014.

Hernandez, Fuensanta. *La enseñanza de las Matemáticas en el Primer Ciclo de Educación Primaria una Experiencia Didáctica*. Murcia: Servivio de publicaciones, 1997.

Juan Enrique Pestalozzi y la escuela activa. 9 de Julio de 2010. 14 de 10 de 2014.

Maqueto, Ana María. *Lengua aprendizaje y enseñanza: El enfoque comunicativo de la teoría a la práctica*. México: Limusa, 2005.

—. *Lengua aprendizaje y enseñanza: El enfoque comunicativo: de la teoría a la práctica*. México: Limusa, 2005.

«Material didáctico: biblio3.» s.f. *biblio3.* 15 de Junio de 2015.

Méndez, Zayra. *Aprendizaje y Cognición*. España: UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA, 2011.

Mijangos Pan, Rocío. «epigijon.» 2007. *Herbat: Propuesta Pedagogica.* 17 de octubre de 2014.

OREALC. *Enfoques estratégicos sobre las TICS en educación en América Latina y el Caribe*. Santiago: Acción digital, 2014.

Ortiz Rodriguez, Francisca. *Matematicas estrategias de enseñanza y aprendizaje*. México D. F.: Pax México, 2001.

Pedagogia Tradicional. s.f. 17 de 12 de 2014.

Pestalozzi. «Cartas sobre la Educación infantil.» *carta III*. 7 de octubre de 1818.

Ramón, Juan. «centro de formacion integral.» 2011. 12 de 10 de 2014.

Rico, Luis. «Didáctica de la Matemática e Investigación.» 5 de octubre de 1999. 17 de 10 de 2014.

Rodriguez, Juana María. *El maestro y las instituciones educativas*. s.f.

Rojas Soriano, Raúl. *Guía para realizar investigaciones sociales*. México: Plaza y Valdéz, 2006.

Rosseau. «Emilio.» Rosseau. *Emilio*. Madrid: Alianza, 1998. 87-88.

Rousseau, Jean Jacques. *Emilio o la Educación*. 1762.

Sabino, Carlos. *EL PROCESO DE INVESTIGACION*. Buenos Aires: Lumen, 1992.

Sandoval, Gonzalo. «Santillana.» 8 de julio de 2014. *La importancia de la didáctica para lograr aprendizaje.* 17 de 10 de 2014.

«Tecnología educativa: diseño y evaluación del medio video: tecnologiaedu.» s.f. *tecnologiaedu.* 19 de Junio de 2015.

Torres Bertos, María. *Scribd*. 01 de 01 de 2012. 16 de 10 de 2014.

Vega, Gustavo. *Jolbes*. 20 de Abril de 2014. 20 de Octubre de 2014.

Verdú, Miguel Calvo. *Formación Abierta Y a Distancia. Formación Profesional Ocupacional.* Sevilla: Mad, S.L., 2006.

Vila, María del Mar Valenzuela. «La educación en el Emilio de Rousseau.» 2009. *La educación en el Emilio de Rousseau.* 16 de 10 de 2014.

Zapata, Oscar. *Herramientas para elaborar tesis e investigaciones socioeducativas*. México D. F.: PAX MEXICO, 2005.

ANEXOS

Anexo #1

UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Estimado/a estudiante, le pedimos contestar con la verdad al siguiente cuestionario a fin de recabar información necesaria para elaborar un proyecto educativo, encaminado a dar soluciones al área de matemáticas.

CICLO: ___

Lea detenidamente cada pregunta y luego ponga una "X" solo en el espacio que crea que corresponde.

1.- ¿Con qué frecuencia le gustaría que sus profesores de matemáticas utilicen material didáctico?

Siempre ___ A veces ___ Rara vez ___ Nunca ___

2.- ¿Qué tan importante cree que es la utilización del material didáctico para el aprendizaje de matemáticas?

Muy importante ___

Importante ___

Más o menos importante ___

Poco importante ___

Nada importante ___

3.- En general, ¿cómo aprende las matemáticas?

Resolviendo ejercicios ___

Teóricamente ___

Experimentalmente ___

4.- En matemáticas, usted recuerda más:

Lo que hace con su propio esfuerzo ___

Lo que aprende de memoria ___

5.- ¿Usted considera que si le enseñan matemáticas con material didáctico mejoraría su rendimiento académico?

Siempre ___ A veces ___ Rara vez ___ Nunca ___

6.- ¿El/la profesor/a de Álgebra Elemental, ha utilizado material didáctico en sus clases?

Siempre___ A veces___ Rara vez___ Nunca___

7.- En el caso de haber utilizado material didáctico, el/la profesor/a ha utilizado:

Papelógrafo ___ Software ___ Páginas de internet ___

Diapositivas ___ Equipo de laboratorio ___ Otros ___________________

8.- ¿Cree que el material didáctico utilizado por el/la profesor/a fue adecuado para la clase?

Siempre ___ A veces ___ Rara vez ___ Nunca ___

9.- En general, ¿cómo le parecieron los materiales didácticos utilizados por el profesor en la asignatura de Álgebra Elemental?

Excelentes ___

Buenos ___

Ni tan buenos ni tan malos ___

Malos ___

Malísimos ___

10.- ¿Cree usted que es importante un laboratorio de matemáticas?

Siempre ___ A veces ___ Rara vez ___ Nunca ___

11.- ¿Cree que la utilización de recursos tecnológicos, ayuda a los docentes a mejorar la actividad educativa?

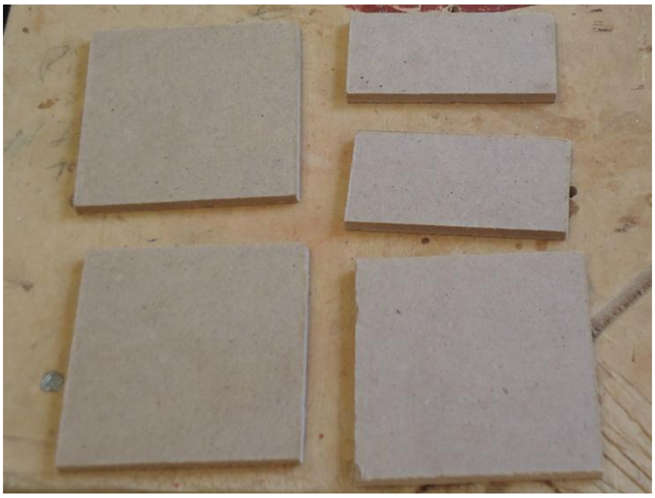
Siempre ___ A veces ___ Rara vez ___ Nunca ___

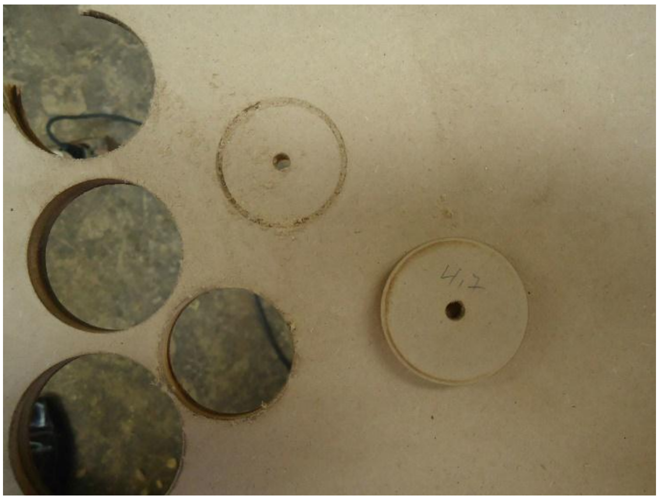
Anexo #2

Elaboración de material didáctico

Preparación y medición del material seleccionado

Cortado del material





Pintado y armado del material